

# 微動アレイ探査における波の位相速度推定手法の概説

## OVERVIEW OF METHODS FOR ESTIMATING MICROTREMOR DISPERSION CURVE

成田 修英\*1, 保井 美敏\*2, 小阪 宏之\*1

Nobuhide NARITA, Mitoshi YASUI and Hiroyuki KOSAKA

Recently, the needs for information about soil are increasing in Japan (MLIT notification, 2016). We are being asked for more detailed and more extensive soil information. In order to meet this need, we have to streamline soil investigation, and in order to do so, we want to use microtremor array exploration.

The microtremor exploration is not a very new method. However, the method has not been applied to exploration of surface soil as a bearing stratum for building foundations until recent years (e.g. IMAI, 2013, IGARASHI, 2016). Therefore, we consider that adequate knowledge of the applicability of this method to surface soil has not been gathered. In this report, we overview the methods for microtremor array exploration (especially the methods for estimating microtremor dispersion curve) and compare and discuss the applicability of these methods to surface soil.

**Keywords :** *Microtremor Array Exploration, Dispersion Curve, Frequency–Wavenumber Method, SPAC Method, Simultaneous Multi–Inputs Wave Field*  
 常時微動アレイ探査, 分散曲線, F-K 法, SPAC 法, 同時多入力波動場

### 1. はじめに

#### 1.1 背景

近年では、杭の支持層確認に対する社会的な要請が厳しくなってきたおり、非常に高密度の地盤情報が必要な物件もある。また長周期地震動の検討では、基礎の支持層や工学的基盤よりも、ずっと深い地層の地盤情報が必要となる場合が多い。このように拡大する地盤情報のニーズに対応するためには、地盤調査の合理化は必須である。

地盤調査の合理化を実現する技術の一つとして、「微動アレイ探査」が考えられる。これは地盤を掘削することに無しに、地表面の常時微動の振動データをパターン解析することにより地下構造を推定する技術であり、この技術の活用によって、地盤調査の大幅な合理化が期待される。しかしながら、この技術が一般的な建築工事のための地盤調査へ適用され始めたのは比較的最近のことであり<sup>2)</sup><sup>3)</sup>、建築工事のための地盤調査の対象となるような比較的浅い地層への適用に関して、十分な知見が蓄積されているとは言い難い。

一般に、低周波数の微動は深い地層の情報を含み、高周波数の微動は浅い地層の構造を反映する。建築基礎設計で主な関心の対象となる数 10m 以浅を探査の対象とする場合、パターン解析の対象とするのは概ね数 Hz 以上の微動であり、その帯域では交通振動などの人間の活動が主な振動源となるが、自然現象が主な振動源となる低周波の微動と比べると、振動源が安定しない傾向がある(図 1)。建築工事の多い都市部では特にその傾向が顕著である。ここで「振動源が安定しない」とは、主要な振動の発生源が一つに絞れず、時間とともに振動源が移動したり、複数の振動源から同時に微動が発生したりする状況を意味する。以下、このような微動波動場を同時多入力波動場と呼ぶ。また逆に、単一の振動源の寄与が卓越している微動波動場を単一入力波動場と呼ぶ。

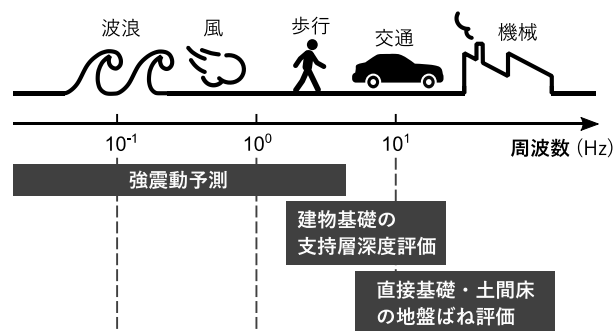


図 1 常時微動の主な振動源と卓越周波数帯および利用目的

浅い地層の調査に微動アレイ探査を適用するためには、同時多入力波動場を想定した振動測定およびパターン解析の計画を立てる必要があるが、前述の通り、そのための知見は十分に蓄積されていない。そこで本報では、現在微動アレイ探査で主に使われているパターン解析の手法である F-K 法<sup>4)</sup>と SPAC 法(Spatial AutoCorrelation Method)<sup>5)</sup>について、その基礎となる理論を解説し、同時多入力波動場への適用性について比較する。

なお微動アレイ探査におけるパターン解析は、微動の鉛直成分を用いる場合と水平成分を用いる場合とで解析手順がやや異なるが、ここではより手順が簡便で適用事例の多い、鉛直成分を用いる場合のみを取り扱う。

#### 1.2 微動アレイ探査とは

初学者のため、微動アレイ探査がどのようなものかについて、簡単に述べておく。

図 2 は微動アレイ探査における微動の測定状況の例である。微動アレイ探査では、同図のように複数の振動センサ(加速度計もしく

\*1 戸田建設株式会社技術開発センター 修士(工学)

\*2 戸田建設株式会社技術開発センター 工学修士

Research and Development Center, TODA CORPORATION, M.Eng.

Research and Development Center, TODA CORPORATION, M.Eng.

は速度計)を地表面上に配置し、各センサ間の相関性の分析から、地表面を伝わる微動の速度を推定する。この速度が、前節で「パターン」と呼んでいたものの正体である。周波数ごとの微動の速度から地下の弾性波速度構造を推定するのが微動アレイ探査の最終的な目標であるが、本報ではそこまで立ち入らずに、その前段階の速度推定に焦点を当てる。この「周波数ごとの微動の速度」を位相速度と呼び、周波数と位相速度の対応関係が作る曲線を分散曲線と呼ぶ。



図2 常時微動アレイ探査における微動の測定状況

## 2. 位相速度推定の原理

図3に同時多入力波動場の模式図を示す。同図は $N + 1$ 個のセンサから成るアレイに $M$ 個の振動源から波が到来状況を示している。位相速度推定の手法には、この図のように円周上+円の中心のセンサ配置を要求するもの(代表例としてSPAC法)と、センサ配置の制限は特に無いもの(代表例としてF-K法)とがある。

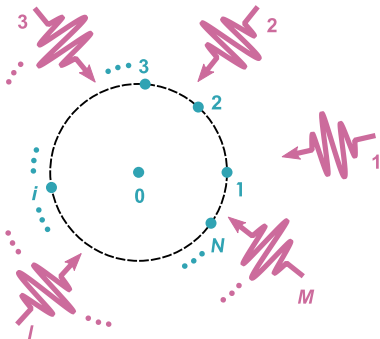


図3 同時多入力波動場の模式図

### 2.1 微動の数学的表現

#### (1) 基本形

地表面の位置 $\mathbf{r} := (x, y)$ における時刻 $t$ の微動振幅を $u(t, \mathbf{r})$ と置くと、この微動の時間1次元空間2次元に関する3重フーリエ変換は次式の $u(\omega, \mathbf{k})$ のようになる。このスペクトルは、周波数-波数スペクトルもしくはF-Kスペクトルと呼ばれる(以下、F-Kスペクトルで呼称を統一する)。

$$u(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \mathbf{r}) \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})) dt d\mathbf{r} \quad (1)$$

ここに、 $\omega$ : 角周波数、 $\mathbf{k}$ : 波数ベクトル ( $\mathbf{k}\mathbf{r}$ はベクトル $\mathbf{k}$ と $\mathbf{r}$ の内積で $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ )のとき、 $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$ )

波数とは、波長の逆数に $2\pi$ をかけたもので、角周波数 $\omega$ における波の位相速度 $c(\omega)$ と $c(\omega) = \omega / \|\mathbf{k}\|$ の関係にある(ここに、 $\|\mathbf{x}\|$ はベクトル $\mathbf{x}$ のノルム(ベクトルの各要素の2乗和平方根))。各周波数において、F-Kスペクトルの振幅がピーク値をとる波数に対応した速度が、微動の位相速度である。

したがって、 $u(t, \mathbf{r})$ を測定して(1)式のフーリエ変換を実行できれば、即座に位相速度が求まることになるが、現在の測定技術で直接的に $u(t, \mathbf{r})$ を得ることは不可能である。アレイから得られる離散かつ有限の微動データ $u(t, \mathbf{r}_i)$  ( $\mathbf{r}_i$ センサ $i$ の位置ベクトルとして)から位相速度推定する方法を考える必要がある。

#### (2) 位相速度推定のための変形

(1)式のフーリエ変換は時間と空間に関するフーリエ変換である。前節では、このフーリエ変換を実施するのに十分な測定を実施することは現在の技術では不可能だと述べたが、それは空間的な測定点の数と密度を確保できないため、時間的には十分な測定点の数(測定時間)と密度(サンプリングレート)が確保できる。つまり時間に関しては十分に精度の高いフーリエ変換が可能なので、 $u(t, \mathbf{r})$ を時間に関してのみフーリエ変換した結果を $u(\omega, \mathbf{r})$ と置く(以下、このスペクトルを周波数-位置スペクトルと呼ぶ)と、これとF-Kスペクトルの関係は、(1)式より、次式の通りに表せる。

$$u(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2)$$

また、この逆変換は次式である。

$$u(\omega, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k} \quad (3)$$

微動アレイ探査では、アレイから得られた微動のデータを時間に関してフーリエ変換し、上記の関係を利用した近似計算によりピーク波数を推定し位相速度を求める。F-K法では、卓越波数の推定に主に(2)式の関係を利用し、SPAC法は(3)式の関係を利用する。

### 2.2 F-K法

#### (1) センサ配置の制限

F-K法にはセンサ配置の制限は無い。ただし、センサ配置によって位相速度の推定精度に差が生じるため、でたらめなセンサ配置で良い訳でもない。確保できるセンサの数とサイトの状況が許す限り、アレイレスポンス(インパルス入力のアレイに入った場合のF-Kパワースペクトル推定値)<sup>9)</sup>が少しでもデルタ関数に近くなるようにセンサを配置すべきである。「アレイレスポンスがデルタ関数に近くなるよう」だと分かりづらいかも知れないが、直感的にはどの方向から微動入力が増えても、微動の到達時間差が検知できるようなセンサ配置を考えればよい。実用的には、奇数の頂点を持つ正多角形、特に正3角形もしくは正5角形の配置が多用される。

#### (2) 位相速度推定方法

F-K法では、(2)式の積分をそのまま数値計算することによって、F-Kスペクトルの推定値 $\hat{u}(\omega, \mathbf{k})$ を計算する。F-K法におけるF-Kスペクトルの推定値は次式で定義される。

$$\hat{u}(\omega, \mathbf{k}) := \sum_{i=1}^N w_i u(\omega, \mathbf{r}_i) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_i) \quad (4)$$

ここに、 $w_i$ : 数値積分の重み係数、 $N$ : センサの総数

重み係数 $w_i$ を適当に決めてやって、総当たり式の探索アルゴリズム(グリッドサーチ)で $|\hat{u}(\omega, \mathbf{k})|^2$ のピークを与える波数探すが、F-K 法の卓越波数推定である。このとき重み係数の決め方によって、F-K 法の中でも更にBFM(Beam Forming Method)とMLM(Maximum Likelihood Method)とに手法が細分化される。

BFM は全ての測定点で $w_i = 1$ とする方法である。前述のアレイレスポンスはBFMにおけるアレイのインパルス応答であり、これを $W(\mathbf{k})$ とおくと、(4)式より $W(\mathbf{k})$ は次のように表される。

$$W(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^N \exp(i\mathbf{k}r_i) \quad (5)$$

BFM は非常に分かり易いが、通常実現可能な点数~10点前後のアレイでは、あまり良い積分精度は得られない。分かり易いためF-K 法の説明では良く登場するが、実際に用いられるのは、ほぼMLMのみである。

MLM の導出の詳細については、本報の主旨からやや外れるため付録3に示すこととして、ここでは結論だけ述べる。MLMはF-K スペクトルの推定値 $\hat{u}(\omega, \mathbf{k})$ に含まれる波数 $\mathbf{k}$ 以外の波数成分の寄与、つまり波数軸に関するスペクトル漏れの影響を最小化するような $w_i$ を数値最適化の手法により決定して、F-K スペクトルの推定を行う手法である(図4)。

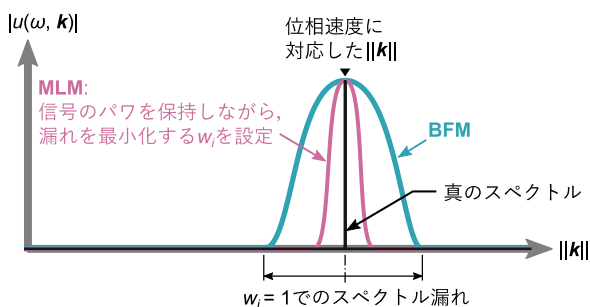


図4 MLMの考え方

MLMによるF-K パワスペクトルは次式で与えられる。

$$|\hat{u}(\omega, \mathbf{k})|^2 = \frac{1}{\mathbf{e}^* \mathbf{X}^{-1} \mathbf{e}} \quad (6)$$

ここに、上添え字\*はベクトルもしくは行列の共役転置(スカラの場合は単なる共役複素数)を表し、 $\mathbf{e}, \mathbf{X}$ はそれぞれ以下の式で定義される。なおベクトル $\mathbf{e}$ はビームステアリングベクトルと呼ばれる。

$$\mathbf{e} := \begin{Bmatrix} \exp(i\mathbf{k}r_1) \\ \exp(i\mathbf{k}r_2) \\ \vdots \\ \exp(i\mathbf{k}r_N) \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{X}$

$$:= \begin{bmatrix} u(\omega, \mathbf{r}_1)u^*(\omega, \mathbf{r}_1) & u(\omega, \mathbf{r}_2)u^*(\omega, \mathbf{r}_1) & \cdots & u(\omega, \mathbf{r}_N)u^*(\omega, \mathbf{r}_1) \\ u(\omega, \mathbf{r}_1)u^*(\omega, \mathbf{r}_2) & u(\omega, \mathbf{r}_2)u^*(\omega, \mathbf{r}_2) & \cdots & u(\omega, \mathbf{r}_N)u^*(\omega, \mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(\omega, \mathbf{r}_1)u^*(\omega, \mathbf{r}_N) & u(\omega, \mathbf{r}_2)u^*(\omega, \mathbf{r}_N) & \cdots & u(\omega, \mathbf{r}_N)u^*(\omega, \mathbf{r}_N) \end{bmatrix}$$

また、これらの記号を使うとBFMによるF-K パワスペクトルは次のように簡潔な形で表現できる。

$$|\hat{u}(\omega, \mathbf{k})|^2 = \mathbf{e}^* \mathbf{X} \mathbf{e} \quad (7)$$

(3) F-K パワスペクトルの例

図5にMLMによるF-K パワスペクトル推定値の例を示す。同図はF-K 法のグリッドサーチにおける各格子点でのF-K パワスペク

トルの値を、波数平面上でコンター図として示したものである。F-K パワスペクトルの計算結果は、同図のようなコンター図として示すのが通例である。

F-K 法では、周波数毎に図5のような結果が得られるので、各周波数におけるピーク波数から、各周波数での位相速度を求める。

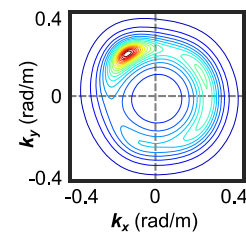


図5 F-Kパワスペクトルの例

(4) MLMに用いるクロススペクトルの行列について

本報では、(6)式の行列 $\mathbf{X}$ は微動データのクロススペクトルを並べたものとして説明しているが、行列 $\mathbf{X}$ を作成するのに、クロススペクトルでなくクロススペクトルをその振幅で割った複素コヒーレンスを用いるべきだとする文献もある。これはMLMの発明者であるCaponが推奨している手順<sup>4)</sup>を踏襲しているものと考えられるが、理論的には振幅で割る理由はない(付録3参照、またCaponも同文献の中で「振幅で割る手順は省いてもよい」と記している)。

Caponはクロススペクトルの正規化を行う理由として、「センサ相互の相対的出力誤差の影響を取り除くため(to remove the effects of improper sensor equalization)」としているが、これは単一の振動源の寄与が卓越する波動場を暗に仮定しており、今我々が検討の対象としている同時多入力波動場は想定されていない。同時多入力波動場では、各振動源から生じる波相互の干渉によって測定点ごとに微動の振幅に違いが出るのが正常であり、正規化によってこの情報を除去してしまうと、逆に位相速度推定の精度が低下する。また現在では、CaponのMLMの論文が発表された時代に比べセンサの精度や扱いやすさが格段に進歩しており、単一の振動源の寄与が卓越するような場合にも、クロススペクトルの正規化を行うメリットはそれほど無い。

振幅の正規化によって位相速度推定に有用な情報が失われる可能性がある以上、クロススペクトルの正規化は行うべきでないと思われる。センサの個体差は気になる場合は、事前にハドルテストを行って適宜キャリブレーション等実施すれば良い。

2.3 SPAC法

F-K 法では、微動の位相速度推定にF-K パワスペクトルのピーク波数を用いたが、SPAC法では周波数-位置スペクトル $u(\omega, \mathbf{r})$ の空間に関する自己相関関数の卓越波数を用いる。位相速度推定で問題になるのは主に寄与が最大の波数成分であり、それ以外の波数成分には興味が無い場合が多いので、自己相関関数に着目したアプローチは自然な発想と言える。建築のシステム同定分野で言うと、RD法や自己相関関数法<sup>8)</sup>に対応する手法である。

## (1) センサ配置の制限

基本的には、円周上と円の中心にセンサを配置する必要がある。ただしレギュラーなセンサ配置の研究もされており<sup>9),10)</sup>、本報でも後で半円アレイ<sup>11)</sup>にSPAC法を適用する。

## (2) 理想的なSPAC係数

SPAC係数とは正規化された空間自己相関係数の方位平均である。(3)式より、ある位置 $\mathbf{r}$ とそこから $\boldsymbol{\gamma}$ だけ離れた点の周波数-位置スペクトルのクロススペクトル $x(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$ は次式のように表せるので、

$$\begin{aligned} x(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) &:= u(\omega, \mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma})u^*(\omega, \mathbf{r}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, \mathbf{k}_1)u^*(\omega, \mathbf{k}_2) \exp(-i(\mathbf{k}_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{k}_2\mathbf{r})) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

これを用いて、空間自己相関関数 $C(\omega, \boldsymbol{\gamma})$ は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} C(\omega, \boldsymbol{\gamma}) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, \mathbf{k}_1)u^*(\omega, \mathbf{k}_2) \exp(-i\mathbf{k}_1\boldsymbol{\gamma}) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega, \mathbf{k})|^2 \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (9)$$

空間自己相関関数を用いて、SPAC係数は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \rho_{\text{SPAC}} &= \frac{1}{2\pi C(\omega, 0)} \int_0^{2\pi} C(\omega, \boldsymbol{\gamma}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\omega, \mathbf{k}) \left( \int_0^{2\pi} \exp(i\|\mathbf{k}\|\|\boldsymbol{\gamma}\| \cos(\theta - \varphi + \pi)) d\theta \right) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $\tilde{p}(\omega, \mathbf{k}) := |u(\omega, \mathbf{k})|^2 / C(\omega, 0)$ 、 $\theta$ ：座標原点から見た観測点の方位角 ( $\boldsymbol{\gamma} = (\|\boldsymbol{\gamma}\| \cos \theta, \|\boldsymbol{\gamma}\| \sin \theta)$ )、 $\varphi$ ：波数 $\mathbf{k}$ を持つF-Kスペクトルの到来方向 ( $\mathbf{k} = (\|\mathbf{k}\| \cos \varphi, \|\mathbf{k}\| \sin \varphi)$ )

(10)式にHansenの積分表示(付録1参照)の0次( $m=0$ )の場合を適用すると、積分が一つ消えて次の形となる。

$$\rho_{\text{SPAC}} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\omega, \mathbf{k}) J_0(\|\mathbf{k}\|\|\boldsymbol{\gamma}\|) d\mathbf{k} \quad (11)$$

ここに、 $J_m$ ：第一種 $m$ 次のBessel関数

ここで(11)式を極座標変換し、微動の性質に関して仮定を一つ付け加えて式を簡略化する。まず極座標変換した(11)式は次のように表せる。

$$\rho_{\text{SPAC}} = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{k}\| \tilde{q}(\omega, \|\mathbf{k}\|, \varphi) J_0(\|\mathbf{k}\|\|\boldsymbol{\gamma}\|) d\|\mathbf{k}\| d\varphi \quad (12)$$

ここに、 $\tilde{q}(\omega, \|\mathbf{k}\|, \varphi)$ ：極座標変換した $\tilde{p}(\omega, \mathbf{k})$

さらに、「ある周波数における微動の伝播は単一の速度で表せる」との仮定して、その速度に対応する波数ベクトルのノルムを $\tilde{k}$ とすれば、

$$\tilde{q}(\omega, \|\mathbf{k}\|, \varphi) = \frac{\delta(\|\mathbf{k}\| - \tilde{k})}{2\pi \|\mathbf{k}\|} \quad (13)$$

と書けるので、これを(12)式に代入すれば、SPAC係数は次の簡潔な形で表せることになる。

$$\rho_{\text{SPAC}} = J_0(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|) \quad (14)$$

複数の速度を考慮する試みも研究レベルでは行われているが<sup>12),13)</sup>、実際、地表面を伝わる微動は幾つかの限られた種類の波の重ね合わ

せて構成されていることが分かっており、その中でも特に基本モードと呼ばれる特定の位相速度を持つ波の寄与が卓越する場合がありますので、この仮定(以下、単一速度の仮定と呼ぶ)は多くの微動波動場で上手く機能する。

SPAC法の卓越波数推定は、実測データの空間自己相関より計算されるSPAC係数と整合する $J_0(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)$ を求めることにより行う。しかし現実には、アレイから得られるデータを使って(9)式の積分を実行し、空間自己相関関数を求めるのは困難である。F-K法のようなアプローチで数値積分を実施する方法も考えられるが、SPAC法では方位平均をとる操作((10)式)も必要であるため、(9)式の積分も数値積分で解決しようとする、必要なセンサ数が多くなりすぎて現実的ではない。そこでSPAC法では、クロススペクトルと空間自己相関係数の関係を利用する。

## (3) アレイを用いたSPAC係数推定

(8)式と(9)式を組み合わせると、次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} x(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) &= C(\omega, \boldsymbol{\gamma}) + \\ &\iint_{\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2} u(\omega, \mathbf{k}_1)u^*(\omega, \mathbf{k}_2) \exp(-i(\mathbf{k}_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{k}_2\mathbf{r})) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

ここでも単一速度の仮定をおけば、異なる波数を持つF-Kスペクトルは全て異なる方向から来ていることになる。つまり異なる波数を持つF-Kスペクトル同士は、全て相異なる全く無関係な振動源から発生していると考えられるので、(15)式の $u(\omega, \mathbf{k}_1)$ と $u(\omega, \mathbf{k}_2)$ は無相関だと考えて良い。したがって、次式が成り立つ。

$$E[u(\omega, \mathbf{k}_1)u^*(\omega, \mathbf{k}_2)] = E[u(\omega, \mathbf{k}_1)]E[u^*(\omega, \mathbf{k}_2)] \quad (16)$$

ここに、 $E[x]$ ：確率変数 $x$ の期待値(「確率変数」に馴染みの無い読者は、単にランダムに変動する変数、乱数のことだと考えて良い)一般に微動の振幅の期待値はゼロだと考えられるので、F-Kスペクトルの期待値もゼロであり $E[u(\omega, \mathbf{k}_1)] = E[u^*(\omega, \mathbf{k}_2)] = 0$ である。よって(16)式より次式が成り立つ。

$$E[u(\omega, \mathbf{k}_1)u^*(\omega, \mathbf{k}_2)] = 0 \quad (17)$$

ここで(15)式の右左辺の期待値を考えると、右辺の下段の項(以下、この項を無相関項と呼び、 $N(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$ と表記する)がゼロになるので、次式が成り立つ。

$$E[x(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})] = E[C(\omega, \boldsymbol{\gamma})] \quad (18)$$

(18)式は、理想的な微動波動場においてクロススペクトルの期待値が空間自己相関関数の期待値に等しいことを示している。しかしこのことは、現実の微動測定データの解析において、クロススペクトルに平均化処理を施した値(異なる時間区間の算術平均(以下、区間平均と呼ぶ)でも周波数平滑化でも良い)と空間自己相関関数の期待値が一致することを意味するものではない。区間平均や周波数平滑化などの算術平均で期待値を得るためには無限長のデータが必要なのに対し、現実には得られるデータは有限だからである。したがって、次式で定義されるSPAC係数の推定値 $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$ は、無相関項の寄与分の誤差を含んだものとなる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{SPAC}} &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{S[x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]}{S[x(\omega, \mathbf{r}_0, 0)]} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{S[C(\omega, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] + S[N(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]}{S[C(\omega, 0)] + S[N(\omega, \mathbf{r}_0, 0)]} \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、 $S[x]$  : 変数 $x$ の有限サンプルによる算術平均、 $\mathbf{r}_0$  : 円形アレイ中心点 (図3 参照) の位置ベクトル

実データを用いた SPAC 係数の推定では、 $S[C(\omega, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] \gg S[N(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]$ となるよう、十分な数のサンプリングを行わなければならない。

算術平均に用いるサンプル数が十分であれば、 $S[C(\omega, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] \approx E[C(\omega, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]$ かつ $S[N(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] \approx 0$ であるので、次式が成り立つ。

$$\hat{\rho}_{\text{SPAC}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[C(\omega, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]}{E[C(\omega, 0)]} \quad (20)$$

さらにアレイ円周上のセンサの数が十分に多ければ、次式も成り立つので、

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[C(\omega, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]}{E[C(\omega, 0)]} \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{E[C(\omega, \boldsymbol{\gamma})]}{E[C(\boldsymbol{\gamma}, 0)]} d\theta \quad (21)$$

このとき $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$ は理論値 $\rho_{\text{SPAC}}$ に近似する。

(19)式が理論と整合したオリジナルの SPAC 係数推定式になるが、一般には次の形の推定式のいずれかが用いられることが多い。

$$\tilde{\rho}_{\text{SPAC}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{S[x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]}{S[|x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)|]} \quad (22)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}^- \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{S[x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]}{|S[x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)]|} \quad (23)$$

(22)式、(23)式は、暗に単一入力波動場を仮定している。単一入力波動場では $|x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)| = |x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)|$ となるため、SPAC 係数の推定に $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}$ や $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}^-$ を用いても良く、むしろこれらの式で計算することにより、センサ相互の相対的出力誤差が打ち消されて SPAC 係数の推定精度が向上する<sup>14)</sup>。しかし同時多入力波動場においては、各入力成分同士の干渉効果により、一般に $|x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)| \neq |x(\omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)|$ となるため、同式の使用は不適切である(「3. 同時多入力波動場における F-K 法と SPAC 法の適用性」も参照のこと)。

#### (4) SPAC 係数推定値と空間自己相関関数の関係

単一速度の仮定に従えば、異なる波数を持つ F-K スペクトル同士は、全て相異なる無相関な振動源から発生しているものと考えられる。このことと、確率統計の基本的な知識を組み合わせると、SPAC 係数の推定値と空間自己相関関数の関係は以下の通りに整理できる(導出の詳細は付録4に記載する)。以下では、表記の簡略化のため空間自己相関関数 $C(\omega, \boldsymbol{\gamma})$ を $C_\gamma$ と書く。

$$\hat{\rho}_{\text{SPAC}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[C_\gamma] + \varepsilon_1}{E[C_0] + \varepsilon_2} \quad (24)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{SPAC}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[C_\gamma] + \varepsilon_1}{\sqrt{E[|C_\gamma|^2] + E[|C_0|^2] - E[P] + \varepsilon_3}} \quad (25)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}^- \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[C_\gamma] + \varepsilon_1}{|E[C_\gamma] + \varepsilon_2|} \quad (26)$$

ここに、 $P$ は振動源の総数を $M$ として、 $P := \sum_{l=1}^M |u(\omega, \mathbf{k}_l)|^4$  (振動源 $l$ に対応する波数ベクトルを $\mathbf{k}_l$ とする)。また、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ はそれぞれ平均化処理によってゼロに近づく項である。区間平均か周波数平滑化あるいはその両方の手段によって $A$ 個のサンプルの算術平均から SPAC 係数の推定値を計算しているものとする、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ のオーダーは Landau のビッグオーを用いて以下の通りに表される。

$$\varepsilon_1 = O\left(\sqrt{\frac{V[|C_\gamma|] + E[|C_0|^2]}{A}}\right) \quad (27)$$

$$\varepsilon_2 = O\left(\sqrt{\frac{V[|C_0|] + E[|C_0|^2]}{A}}\right) \quad (28)$$

$$\varepsilon_3 = O\left(\sqrt{\frac{V[|C_0|^2 + |C_\gamma|^2] + E[(|C_0|^2 + |C_\gamma|^2)^2]}{A}}\right) \quad (29)$$

単一入力波動場では、空間自己相関関数の定義(9)式より、 $C_0 = |C_\gamma|$ かつ $P = C_0^2 = |C_\gamma|^2$ なので、3つの SPAC 係数推定値 ( $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}, \tilde{\rho}_{\text{SPAC}}, \tilde{\rho}_{\text{SPAC}}^-$ ) は全て近似値をとる。一方、同時多入力波動場では、 $C_0 \neq |C_\gamma|$ かつ $P \neq C_0^2 \neq |C_\gamma|^2$ なので、3つの推定値は全て異なる値となる。このとき、SPAC 係数の定義 ((10)式) に整合するのは $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$ のみであるため、前述の通り、 $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}$ と $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}^-$ の使用は不適切である。

また単一入力波動場では $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は常にゼロとなる(付録4も参照のこと)が、同時多入力波動場では、求めたい値である $C_0$ や $C_\gamma$ と同程度の絶対値を持ち得る。この影響を軽減するためには、十分なサンプル数 ((27)式から(29)式における $A$ ) を確保することを用いた平均化が必須となる。

#### (5) SPAC 係数の例

図6に SPAC 係数 ( $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}$ ) の例を示す。(19)式もしくは(22),(23)式より、このような結果が得られるので、各周波数について SPAC 係数を第一種0次の Bessel 関数に当てはめた時の引数を逆算し、位相速度を求めるのが SPAC 法の位相速度推定である。

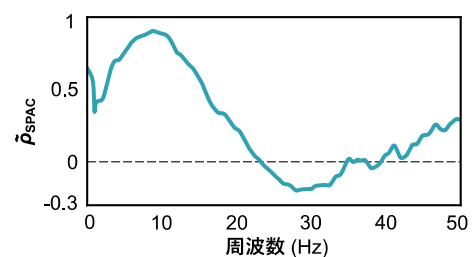


図6 SPAC 係数の例

### 3. 同時多入力波動場における F-K 法と SPAC 法の適用性

実測データと数値シミュレーションによる模擬微動データを対象に、F-K 法 (MLM) により推定される位相速度と、 $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}, \tilde{\rho}_{\text{SPAC}}, \tilde{\rho}_{\text{SPAC}}^-$ より推定される位相速度とを比較する。

### 3.1 実測例

まず実測において、単一入力波動場に近いと考えられる例と同時多入力波動場に近いと考えられる例を示す。現実の微動波動場においては、振動源の情報は得られないが、F-K法より得られるF-Kパワースペクトルのコンター形状より、一方は単一入力波動場に近く、他方は同時多入力波動場に近いと推測した。

測定はどちらの例も500Hz サンプリングで20分間行い、20分間のデータ全長を16.348秒間の小区間に分割、各区間で計算したクロススペクトル（もしくはクロススペクトルの絶対値）の区間平均をとった結果を、F-K法（MLM）、SPAC法（3種）に適用した。この際、各小区間のクロススペクトルは、区間平均をとる前に2Hz幅のParzen窓で周波数平滑化を行った。

また、アレイの形状はどちらの例も2重正三角形で、F-K法（MLM）は全点のデータを使用し、SPAC法は半円形アレイの考え方<sup>11)</sup>を適用して小さい方の正三角形プラス1点のみのデータを使用した（図7）。

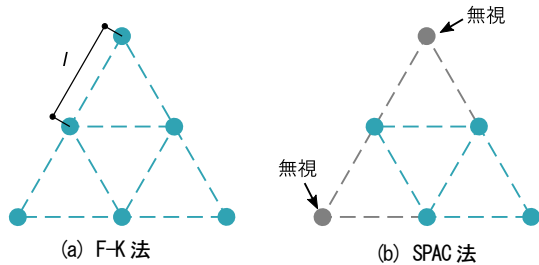


図7 微動の実測に用いたアレイ

#### (1) 単一入力波動場に近いと考えられる例

これは長崎県某所で測定した例であり、小さい方の正三角形の1辺は  $l = 1.25\text{m}$  である。

図8にこのサイトでのF-Kスペクトルの例、図9に各手法より推定された分散曲線を示す。図8より、このサイトでは単一の波数成分の寄与が卓越しており、このことから単一入力波動場に近い条件になっていることが推測される。また図9より、このサイトではF-K法とSPAC法（3種）の分散曲線は概ね整合する。

#### (2) 同時多入力波動場に近いと考えられる例

これは神奈川県某所で測定した例であり、小さい方の正三角形の1辺は  $l = 1.15\text{m}$  である。

図10にこのサイトでのF-Kスペクトルの例、図11に各手法より推定された分散曲線を示す。図10より、このサイトでは多方向にスペクトルのピークが分布しており、このことから同時多入力波動場に近い条件になっていることが推測される。また図11より、このサイトではF-K法、SPAC法（3種）の位相速度はあまり整合していない。 $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$  は特に目立って他の手法と合わない傾向にあるが、F-K法とSPAC法の残りの2種もそれほど合っていない。PS検層や表面波探査など他の物理探査は用いていないため、どの手法が最も実地盤の特徴を最も良く反映しているのか決めることは出来ないが、10Hz以上の帯域でF-K法とSPAC法（3種）を比較すると、F-K法は比較的值が安定しているのに対し、SPAC法の位相速度は値の変動が大きく、地表面を伝わる波の位相速度としてはF-K法の結果の方が自然に思われる。

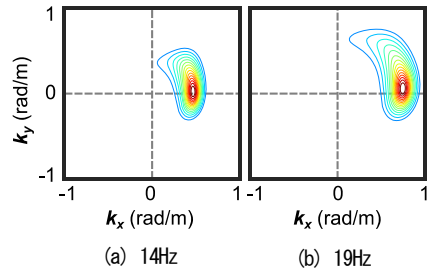


図8 単一入力波動場に近いと考えられるサイトのF-Kパワースペクトル

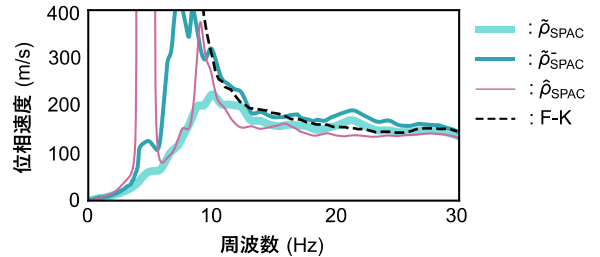


図9 単一入力波動場に近いと考えられるサイトの分散曲線

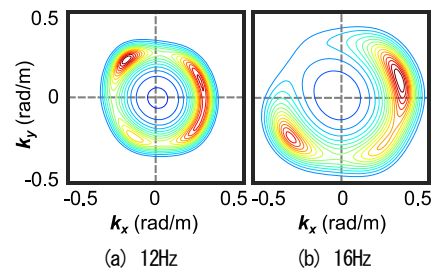


図10 同時多入力波動場に近いと考えられるサイトのF-Kパワースペクトル

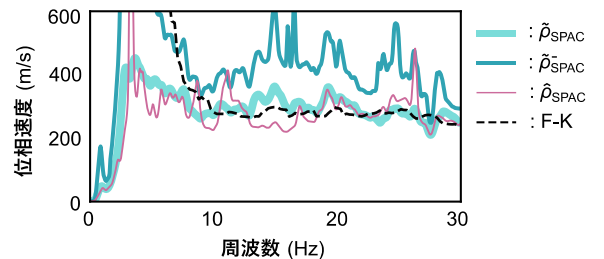


図11 同時多入力波動場に近いと考えられるサイトの分散曲線

### 3.2 数値シミュレーション

#### (1) 模擬微動データの作成方法

微動の性質について、以下の仮定をおく。① 微動波動場は  $M$  個の有限な波数成分の重ね合わせとして表される。② 各波数成分におけるセンサ間の位相差は、各成分の持つ波数とセンサの位置により確定的に定まる。③ 各波数成分は時間軸についてホワイトノイズと見做すことが出来る。

この仮定に基づけば、基準となる位置の微動として  $M$  個の独立なホワイトノイズを作成し、それに各成分の波数から定まる基準点とセンサ位置との位相差を付加することにより、所要の波数成分を持つ模擬微動データを作成できる。図12は模擬微動データ作成のフローである。

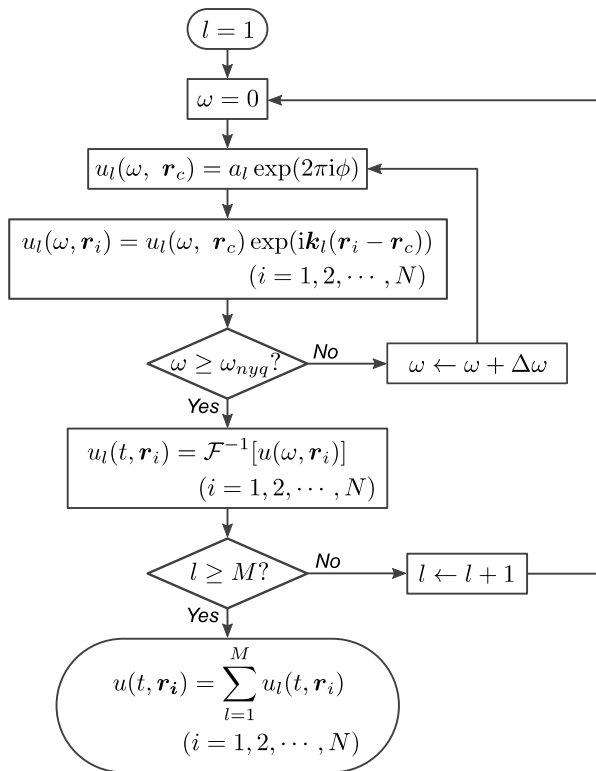


図 12 模擬微動データ作成のフロー

ここに、 $\mathbf{r}_c$  : 基準点の位置,  $a_l$  :  $l$  番目の波数成分の周波数-位置スペクトルの絶対値,  $\phi$  : 一様乱数 ( $0 < \phi < 1$ ),  $\omega_{nyq}$  : ナイキスト角周波数,  $\Delta\omega$ : FFT の周波数刻み,  $\mathcal{F}^{-1}[x]$  : 変数  $x$  の逆フーリエ変換

(2) シミュレーションの条件

単一入力波動場と同時多入力波動場, それぞれ 1 ケースずつシミュレーションを実施する. 図 13 にシミュレーション条件の模式図を示す. 位相速度は一律 100m/s とし, 同時多入力波動場の波数成分の数は 2 つ, 振幅が等しく進行方向が逆向きの成分とする.

また, アレイは半径 1m の正 5 角形+中心の配置とし, 模擬データのサンプリングレートは 1kHz, データ長は 16.384 秒とする.

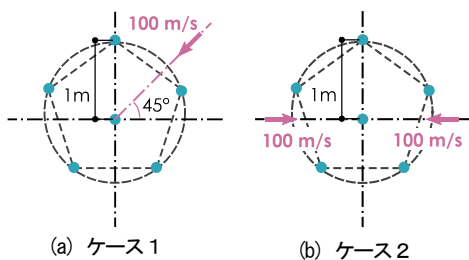


図 13 シミュレーション条件

(3) F-K 法 (MLM) の適用方法

このシミュレーションでは模擬微動にノイズは混入させないので, 図 13 の条件下では, クロススペクトルの行列  $\mathbf{X}$  の行列式がゼロに非常に近くなってしまい, 定義通りの MLM の計算は難しい<sup>15)</sup>. このような場合には,  $\mathbf{X}$  の代わりに次のような行列  $\bar{\mathbf{X}}$  を用いて MLM の計算を行う<sup>15)</sup>.

$$\bar{\mathbf{X}} := \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{I} \tag{30}$$

ここに、 $\varepsilon$  :  $\mathbf{X}$  の各要素の絶対値に対して十分に小さい正の実数 (ダンピングファクターと呼ばれる),  $\mathbf{I}$  : 単位行列

$\mathbf{X}$  の各行において, (非対角項) / (対角項) の比は各センサ間のコヒーレンスを表しているのので, (30)式左辺の計算は,  $\varepsilon$  の分だけ人為的に各センサ間の相関を下げる操作になっている. したがって,  $\varepsilon$  の値を大きくしすぎると計算の精度が低下するデメリットはある. ただし,  $\mathbf{X}$  でなく  $\bar{\mathbf{X}}$  を用いることで各センサ間の相関が過小評価されることの二次的な効果として,  $\det(\mathbf{X}) \approx 0$  の場合でも確実に  $\det(\bar{\mathbf{X}}) \gg 0$  となるため, MLM の計算は安定する. デメリットを最小限に抑えるため,  $\varepsilon$  の値は計算結果が安定する最小限に設定する場合が多い.

今回のシミュレーションでは, クロススペクトル行列  $\mathbf{X}$  の各要素の絶対値の平均を  $\mu_X$  として,  $\varepsilon = \mu_X \times 10^{-5}$  を用いる.

(4) 模擬微動データを用いた位相速度推定

図 14 に, 作成した模擬微動データより推定した位相速度を示す. 同図(a)より単一入力の場合は全ての方法で正しい位相速度推定が出来ているが, 同図(b)より同時多入力の場合は F-K 法と  $\hat{\rho}_{SPAC}$  を用いた SPAC 法のみが設定した位相速度 100m/s を正しく推定できる結果となった.

SPAC 法の推定値の中で  $\hat{\rho}_{SPAC}$  を用いた推定値のみ正解を与える結果となったのは, 「2.3 (3) アレイを用いた SPAC 係数推定」で述べた通り, 同時多入力波動場では  $\hat{\rho}_{SPAC}$  のみが SPAC 法の理論に適合するためである. また  $\tilde{\rho}_{SPAC}$  を用いた結果と  $\hat{\rho}_{SPAC}$  を用いた結果で比べると,  $\tilde{\rho}_{SPAC}$  を用いた結果の方が比較的正確に近い. これは, (25)式と(26)式の比較より,  $\tilde{\rho}_{SPAC}$  の方が  $\hat{\rho}_{SPAC}$  よりも  $\hat{\rho}_{SPAC}$  に近いと考えられる.

F-K 法は基本的に単一入力波動場でも同時多入力波動場でも問題ないが, 同時多入力波動場では低周波数側で位相速度が過大評価される傾向にある. これは複数の入力に対応した複数の F-K パワースペクトルのピークの裾が重なり合うことにより, 重なり合った裾の振幅がピークの振幅を上回って偽のピークが発生し, 位相速度の推定に誤差が生じることに起因する. この現象は F-K スペクトルの縮重と呼ばれる<sup>16)</sup>. 低周波数側でスペクトルの縮重が生じる (生じ易い) のは, 低周波数側では波数が小さく各測定点間での位相差が小さいため相対的に SN 比が低下することに起因する. このシミュレーションに関しては模擬データそのものにはノイズは入っていないが, ダンピングファクター ((付 30)式の  $\varepsilon$ ) 由来のノイズ成分によりスペクトルの縮重が発生している.

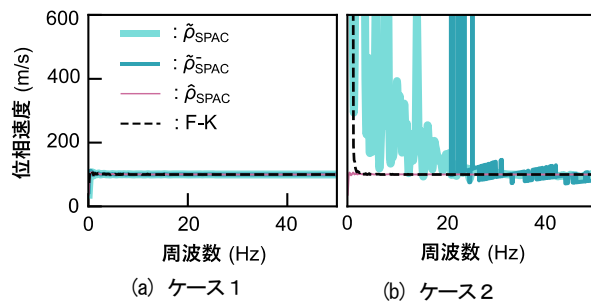


図 14 模擬微動データより推定された分散曲線

### 3.3 適用性検討のまとめ

数値シミュレーションの結果より（理論的にも）、SPAC 法の中で同時多入力波動場に適用可能なのは  $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$  を用いた方法だけだと考えられる。しかし実測データを用いた検討では、 $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$  による結果は  $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}$  による結果よりも悪くなっているように見える。これは  $\hat{\rho}_{\text{SPAC}}$  が実データに含まれる種々のノイズ、特にセンサ相互の相対的出力誤差の影響を受けやすい傾向にあることに起因していると考えられる。この弱点の改善のために  $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}$  や  $\bar{\rho}_{\text{SPAC}}$  を用いた方法が提案された訳だが<sup>14)</sup>、上に示した通り、同時多入力波動場では、 $\tilde{\rho}_{\text{SPAC}}$  も  $\bar{\rho}_{\text{SPAC}}$  も使うことはできない。したがって現行の SPAC 法の計算は、同時多入力波動場に対する適用には向いていないと考えられる。

一方 F-K 法の方は、同時多入力波動場でも比較的安定した結果が得られる。ただしスペクトルの縮重には注意する必要がある。スペクトルの縮重が疑われる場合には、アレイのサイズを拡大する（(付 11)式の  $r_{\text{max}}$  を大きくする）、測定時間を長くしてデータの SN 比を向上させる（(付 11)式の  $\phi_{\text{min}}$  を小さくする）などして F-K 法の波数分解能を上げる必要がある。

## 4. おわりに

### 4.1 得られた知見

本報では、F-K 法と SPAC 法の原理について説明し、同時多入力波動場への適用性について検討した。同時多入力波動場への適用性検討では、以下の知見を得た。

まず SPAC 法は、本報で検討対象とした 3 種類の計算方法の何れについても、同時多入力波動場への適用には向いていない。一方、F-K 法は、低周波数側でスペクトルの縮重が生じる場合があるものの、高周波数側では同時多入力波動場でも安定した結果が得られるため、同時多入力波動場への適用性は比較的良好。したがって、浅い地層の探査など同時多入力波動場が想定される探査では F-K 法を採用すべきだと考えられる。

### 4.2 今後の課題

F-K 法のピーク波数探索アルゴリズムはグリッドサーチであるため、波数の探索範囲や探索刻みの設定に地盤に関する先験的な情報もしくは解析者の試行錯誤が要求される。また探索対象の格子点の数だけデータが出力されるため、解析後の後処理も SPAC 法に比べて手間がかかる。この問題の解決のため、以下の検討課題が考えられる。

① より効率的に F-K 法を実施するアルゴリズムを開発する。② 単一入力波動場では SPAC 法を利用するため、単一入力か同時多入力か簡便に判定する手法を開発する。このうち①については、すでに検討に着手しており一定の成果を得ている<sup>17), 18)</sup>が、実用的なアルゴリズムの完成には未だ至っていない。

### 参考文献

- 国土交通省「基礎ぐい工事の適正な施工を確保するために講ずべき措置の実施に向けて」、  
[http://www.mlit.go.jp/totikensangyo/const/totikensangyo\\_const\\_tk1\\_000116.htm](http://www.mlit.go.jp/totikensangyo/const/totikensangyo_const_tk1_000116.htm)  
1 (2019-7-24 参照)

- 今井博, 青木智幸, 石井裕康 「微動チェーンアレイによる浅部探査 十数メートル程度までの深度に関する微動探査の適用性」, 大成建設技術センター報, pp. 26\_1-26\_7, 2013
- 五十嵐治人, 伊藤仁 「微動チェーンアレイ探査による支持地盤の推定」, 銭高組技報, pp. 17-22, 2016
- J. CAPON “High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 52, No. 8, pp. 1408-1418, 1968
- Keiiti AKI “Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microtremors”, *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Vol. 35, pp. 415-456, 1957
- Masanori HORIKE “Inversion of phase velocity of long-period microtremors to the s-wave velocity structure down to the basement in urbanized areas”, *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 33, pp. 59-96, 1985
- 成田修英, 保井美敏, 小阪宏之 「常時微動アレイ探査による傾斜基盤サイトの支持層推定」, 第 53 回地盤工学研究発表会梗概集, pp. 1967-1968, 2018
- 日本建築学会 「建築物の減衰」, 日本建築学会, pp. 65-96, 2000
- Michael W. ASTEN “On bias and noise in passive seismic data from finite circular array data processed using SPAC methods”, *GEOPHYSICS*, Vol. 71, No. 6, pp. V153-V162, 2006
- 白石英孝, 松岡達郎 「Lamb の問題に基づくレーリー波複素コヒーレンス関数の離散定式とその応用-空間自己相関法の新しい解釈-」, 物理探査, Vol. 58, pp. 137-146, 2005
- 岡田広, 松岡達郎, 白石英孝, 八戸昭一 「微動アレイ探査のための空間自己相関法: 半円形アレイの適用について」, 物理探査学会学術講演梗概集, pp. 183-186, 2003
- Kohji TOKIMATSU, Shuji TAMURA, and Hisaya KOJIMA “Effects of multiple modes on Rayleigh wave dispersion characteristics”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 118, No. 10, pp. 1529-1543, 1992
- 池田達紀, 松岡俊文, 辻健, 林宏一 「SPAC 法における異なる相関距離を考慮したマルチモード解析」, 物理探査, Vol. 64, pp. 127-138, 2011
- 岡田広, 松島健, 日高英二 「長周期微動に含まれる表面波の位相速度推定について: 空間自己相関法と周波数波数法の比較」, 北海道大学地球物理学研究報告, Vol. 49, pp. 53-62, 1987
- Michael W. ASTEN and J. D. HENSTRIDGE “Array estimators and the use of microseisms for reconnaissance of sedimentary basins”, *GEOPHYSICS*, Vol. 49, No. 11, pp. 1829-1837, 1984
- 岡田広, 凌甦群, 佐藤洋, 笹谷務, 宮腰研, 斎藤誠治, 石川顕, 南雲秀樹 「微動利用の地下構造推定における周波数・波数スペクトル法と空間自己相関法の比較検討」, 物理探査学会学術講演論文集, pp. 105-109, 1995
- 成田修英, 保井美敏, 山本健史, 小阪宏之 「FK パワースペクトル・ピーク波数の直接推定法」, 第 52 回地盤工学研究発表会梗概集, pp. 1775-1776, 2017
- 成田修英, 保井美敏, 小阪宏之 「常時微動アレイ観測記録に対する主成分分析の適用性検討」, 第 15 回日本地震工学シンポジウム, pp. 206-215, 2018
- 例えば 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信 「岩波数学公式 3 特殊関数」, 岩波書店, 1987



- 20) 例えば A. N. KOLMOGOROV, I. G. ZHUBENKO and A. V. PROKHOROV (丸山哲郎, 馬場良和 訳)「コロモゴロフの確率論入門」, 森北出版株式会社, 2003
- 21) 宮腰研 「微動探査法による表面波位相速度推定の基礎的研究」, 北海道大学大学院理学研究科博士論文, 1998
- 22) Hiroshi ARAI and Kohji TOKIMATSU “S-wave velocity profiling by joint inversion of microtremor dispersion curve and horizontal-to-vertical (h/v) spectrum”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 95, No. 5, pp. 1766–1778, 2005
- 23) R. T. LACOSS “Data adaptive spectral analysis method”, *GEOPHYSICS*, Vol. 36, No. 4, pp. 661–675, 1971
- 24) Ikuo CHO, Taku TADA, and Yuzo SHINOZAKI “A new method to determine phase velocities of Rayleigh waves from microseisms”, *GEOPHYSICS*, Vol. 69, No. 6, pp. 1535–1551, 2004
- 25) 先名重樹 「地震防災のための地盤情報と今後の展開」, MSS 技報, Vol. 24, 2014

付録 1. 本報で用いた数学の基礎知識

付 1. 1 Hansen の積分表示

第 1 種 Bessel 関数は指数関数を用いて次のように表すことができる。これは Hansen の積分表示と呼ばれる<sup>19)</sup>。

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(i\left(z \cos \theta - m\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) d\theta \quad (付 1)$$

付 1. 2 確率変数の基礎知識

確率変数の性質として本報で用いるのは、以下の性質のみである。以下の性質に関する説明、証明については、確率論の教科書を参照されたい<sup>20)</sup>。

(1) 独立な確率変数の性質

2つの確率変数  $x, y$  が独立であり、確率変数  $x$  の期待値を  $E[x]$ 、分散を  $V[x]$  で表すとき、以下の関係が成り立つ ((付 2)式については、独立でなくても成り立つ)。

$$E[x + y] = E[x] + E[y] \quad (付 2)$$

$$E[xy] = E[x]E[y] \quad (付 3)$$

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2 \quad (付 4)$$

$$V[x + y] = V[x] + V[y] \quad (付 5)$$

また、確率変数  $x$  の定数倍  $ax$  について、次式が成り立つ。

$$V[ax] = a^2 V[x] \quad (付 6)$$

さらに分散が全て  $V_x$  である互いに独立な確率変数  $x_1, x_2, \dots, x_N$  があるとき、その算術平均の分散は、(付 5)式と(付 6)式を組み合わせる次のように書ける。

$$V\left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}\right] = \frac{NV_x}{N^2} = \frac{V_x}{N} \quad (付 7)$$

(2) 標準化と算術平均

期待値  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  の確率変数を  $x(\mu, \sigma)$  と書くとき、任意の  $x(\mu, \sigma)$  は、平均ゼロ、分散 1 の確率変数  $x(0, 1)$  を使って次のように表せる。

$$x(\mu_x, \sigma_x) = \mu_x + \sigma_x x(0, 1) \quad (付 8)$$

$A$  個のサンプルを使った  $x(\mu_x, \sigma_x)$  の算術平均を考えると、(付 7)式、(付 8)式より、次式が成り立つ。

$$S[x(\mu_x, \sigma_x)] = \mu_x + \frac{\sigma_x}{\sqrt{A}} x'(0, 1) \quad (付 9)$$

ここに、 $x'(0, 1)$  : (付 8)式の  $x(0, 1)$  とは別の平均ゼロ、分散 1 の確率変数

(付 9)式より、シグナルが  $\mu_x$ 、ノイズの分散が  $\sigma_x^2$  のデータ  $A$  個の算術平均は、Landau のビッグオーを用いて次のように書ける。

$$S[x(\mu_x, \sigma_x)] = \mu_x + O\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{A}}\right) \quad (付 10)$$

付録 2. 適用性の補足：ピーク波数検出限界

位相差の検出分解能には限界があるので小さすぎる波数は検出できないし、波数の検出に周期関数を利用しているため最小センサ間隔間の位相差が 1 サイクルを超えるような波数も基本的に検出不能である (この問題は空間エイリアシング<sup>15)</sup> と呼ばれている)。つまり単一のセンサ配置で検出できるピーク波数の範囲、すなわち位相速度を推定できる周波数帯域には一定の限界がある。したがって微動アレイ探査の実施においては、探査対象周波数 (深度) と探査可能な周波数が一致するようにセンサ配置を計画する必要がある。単一のセンサ配置では探査対象周波数を全てカバーできないことも多いが、そのような場合には、センサの配置を変えながら複数回の測定を実施する。

付 2. 1 小波数 (長波長) 側の限界

アレイの最大センサ間隔 (SPAC 法の場合は解析に使用するアレイ半径) を  $r_{max}$  とし、アレイと測定対象サイトの波動場の性質および測定条件 (測定時間、サンプリングレート等) によって定まる 2 測定点間の位相差の検出下限値を  $\phi_{min}$  とする。このときアレイによって検出できる最小波数  $k_{min}$  は次式で表される。

$$k_{min} \geq \frac{\phi_{min}}{r_{max}} \quad (付 11)$$

$\phi_{min}$  の一つの目安として、F-K 法で  $2\pi/3 \sim 2\pi/5$  程度、SPAC 法で  $\pi/3 \sim \pi/5$  程度という値が知られている<sup>21), 22)</sup>。ただし、 $\phi_{min}$  は基本的にデータの SN 比によって定まる値であり、この値は測定に用いた機器の特性や測定対象の波動場の性質によって大きく変動し得るので、文献値は測定計画を立てる際になどに用いる参考値と考えるべきである。

付 2. 2 大波数 (短波長) 側の限界

空間エイリアシングを避けるためには、F-K 法では複素正弦波が、SPAC 法では第 1 種 0 次の Bessel 関数が、それぞれ 1 価関数として扱える波数の範囲内にものみ限定して解析を行う必要がある。

したがってアレイの最小センサ間隔 (SPAC 法の場合は解析に使用するアレイ半径) が  $r_{min}$  のとき、アレイによって検出できる最大波数  $k_{max}$  は次式で表される。

$$k_{max} \leq \frac{\phi_{max}}{r_{min}} \quad (付 12)$$

$$\phi_{max} = \begin{cases} 2\pi & \text{(F-K 法)} \\ j_{1,1} \approx 1.22\pi & \text{(SPAC 法)} \end{cases} \quad (付 13)$$

ここに、 $\phi_{max}$  : 各手法の評価関数が1 価関数として扱える最大の引数、 $j_{n,k}$  : 第1種  $n$  次の Bessel 関数の第  $k$  零点

ただし(付13)式は最小センサ間隔が  $r_{min}$  である以外は完全な測定データが得られている場合を想定した理想的な上限であり、実現可能な有限のアレイより得られるデータでは、限界値はこれよりも小さくなる。実アレイにおける限界は用いるアレイと評価対象の波動場の性質によって変化するが、例えば二重正三角形アレイでは、次に示す通りの値となることが知られている<sup>21)</sup>。

$$\phi_{max} \approx \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & (\text{F-K 法}) \\ \pi & (\text{SPAC 法}) \end{cases} \quad (\text{付 14})$$

### 付録3. MLM の導出

MLM すなわち Maximum Likelihood Method とは、確率過程のパラメータ推定における最尤法の事を指し、元々は地表面の微動を確率過程として捉える立場から出てきた手法であるが、Lacoss の解釈<sup>23)</sup> を応用すれば、本文(4)式の重み係数  $w_i$  を決定する手順の一つとしての解釈も成り立つ。この解釈に基づく MLM の導出が、恐らく最も予備知識を必要としない導出手順になるので、以下ではその説明を行う。

ある特定の波数  $\kappa$  における F-K スペクトルを評価することを考える (以下、 $\kappa$  をターゲット波数と呼ぶ)。ターゲット波数  $\kappa$  における最適な重み係数を決定するために、まず周波数-位置スペクトルをターゲット波数  $\kappa$  が寄与する部分とそれ以外とに分離する。波数平面上でターゲット波数  $\kappa$  近傍の微小領域を除く領域を  $R$  とすると、本文(3)式より、周波数位置スペクトルは次のように分離できる。

$$u(\omega, \mathbf{r}) = u(\omega, \kappa) d\mathbf{k} \exp(-i\kappa \mathbf{r}) + \int_R u(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\kappa \mathbf{r}) d\mathbf{k} \quad (\text{付 15})$$

ここで表記の簡略化のため、

$$u'(\omega, \kappa) := u(\omega, \kappa) d\mathbf{k} \quad (\text{付 16})$$

$$R(\omega, \kappa) := \int_R u(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\kappa \mathbf{r}) d\mathbf{k} \quad (\text{付 17})$$

とおき、(付15)式を F-K スペクトルの推定式 (本文(4)式) に代入すると、ターゲット波数の寄与とそれ以外の部分に分離された F-K スペクトルの推定式が次のように得られる。

$$\hat{u}(\omega, \kappa) = u'(\omega, \kappa) \sum_{i=1}^N w_i + R(\omega, \kappa) \sum_{i=1}^N w_i \exp(i\kappa \mathbf{r}_i) \quad (\text{付 18})$$

(付18)式下段の項 (以下、この項を漏れ項と呼び、上段右辺の項をターゲット項と呼ぶ) が  $\hat{u}(\omega, \kappa)$  に与える影響を最小化するような  $w_i$  が上手く設定できれば、F-K スペクトル推定値のスペクトル漏れ (本文図4参照) も最小化され、最尤の F-K スペクトル推定が実現する。

漏れ項を最小化する  $w_i$  を単純に考えるとすぐに  $w_i = 0$  が思いつくが、これだとターゲット項もゼロになってしまうので意味が無い。

ターゲット項のパワを保持しつつ、漏れ項の影響を低減するような  $w_i$  を決める必要がある。

そこでターゲット項のパワを保持するための条件を考える。これは、(ターゲット項) =  $u'(\omega, \kappa) \sum w_i$  であることより、 $\sum w_i$  が定数であれば良い。この条件、つまり  $\sum w_i = \text{定数}$  (ここでは  $\sum w_i = 1$  とする) の条件下で、F-K パワスペクトルを最小化すると、ターゲット項は保持されて漏れ項の影響のみが最小化される。したがって、F-K パワスペクトルに関する次式のような条件付き最小化問題を解けば、求める最尤の  $w_i$  が得られる。

$$\text{最小化 } G := |\hat{u}(\omega, \kappa)|^2 + \lambda \left( \sum_{i=1}^N w_i - 1 \right) \quad (\text{付 19})$$

ここに、 $\lambda$  : Lagrange の未定乗数

これを整理して解きやすくするために、次のベクトルを定義する。

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} w_1 \exp(i\kappa \mathbf{r}_1) \\ w_2 \exp(i\kappa \mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ w_N \exp(i\kappa \mathbf{r}_N) \end{pmatrix} \quad (\text{付 20})$$

これとクロススペクトル行列  $\mathbf{X}$  およびビームステアリングベクトル  $\mathbf{e}$  を組み合わせると、F-K パワスペクトル推定値と  $\sum w_i$  は以下のようにも書ける。

$$|\hat{u}(\omega, \kappa)|^2 = \mathbf{v}^* \mathbf{X} \mathbf{v} \quad (\text{付 21})$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = \mathbf{e}^* \mathbf{v} \quad (\text{付 22})$$

これを用いると、最小化の目的関数  $G$  は次式のように整理できる。

$$G = \mathbf{v}^* \mathbf{X} \mathbf{v} + \lambda (\mathbf{e}^* \mathbf{v} - 1) \quad (\text{付 23})$$

(付23)式の  $G$  を最小化するベクトル  $\mathbf{v}$  が決定されると、(付20)式より、 $w_i$  も自動的に決定されるので、 $G$  を最小化する  $\mathbf{v}$  をまず求めることにする。 $G$  を最小化する  $\mathbf{v}$  は、 $G$  の  $\mathbf{v}$  に対する勾配がゼロになる点の  $\mathbf{v}$  であるので、次式を満たす。

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}^* \mathbf{X} + \lambda \mathbf{e}^* = 0 \quad (\text{付 24})$$

これを整理すると、未定乗数  $\lambda$  について以下の2つの解が得られる。

$$\lambda = -\mathbf{v}^* \mathbf{X} \mathbf{e}, -\frac{\mathbf{v}^* \mathbf{e}}{\mathbf{e}^* \mathbf{X}^{-1} \mathbf{e}} \quad (\text{付 25})$$

このうちひとつめの解は  $\mathbf{v} = 0$  となる解であり、 $w_i = 0$  になってしまうので意味が無い。2つめの解について考えると、この解の分子  $\mathbf{v}^* \mathbf{e}$  はベクトル  $\mathbf{v}, \mathbf{e}$  の定義より  $\mathbf{v}^* \mathbf{e} = \sum w_i$  なので、制約条件  $\sum w_i = 1$  より1でなければならない。つまり、次式が成り立つ。

$$\lambda = -\frac{1}{\mathbf{e}^* \mathbf{X}^{-1} \mathbf{e}} \quad (\text{付 26})$$

これを(付24)式に代入すると、 $G$  を最小化する  $\mathbf{v}$  が求まり、それをさらに(付21)式に代入すると  $|\hat{u}(\omega, \kappa)|^2$  が定まる。

$$\mathbf{v}_{opt} = \frac{\mathbf{X}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^* \mathbf{X}^{-1} \mathbf{e}} \quad (\text{付 27})$$

$$|\hat{u}(\omega, \kappa)|^2 = \frac{1}{\mathbf{e}^* \mathbf{X}^{-1} \mathbf{e}} \quad (\text{付 28})$$

ここに、 $\mathbf{v}_{opt}$  :  $G$  を最小化する  $\mathbf{v}$

以上より, MLM による F-K パワースペクトル推定値が導かれた.

また(付 27)式および  $\mathbf{v}$  の定義 ((付 20)式) より, 重み係数  $w_i$  は次式のようになる.

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^N q_{ij} \exp(i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i))}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{ij} \exp(i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i))} \quad (\text{付 29})$$

(付 29)式に測定データに依存する項  $q_{ij}$  が含まれていることから分かるように, MLM における重み係数  $w_i$  は測定データに応じて特性が変化する適応フィルタとしての性質を持つ.

#### 付録 4. SPAC 法に現れるクロススペクトルの算術平均評価

ここではクロススペクトルおよびその 2 乗の算術平均と空間自己相関関数の関係について考える. 以下, 表記の簡略化のため, クロススペクトル  $x(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$  を  $x_\gamma$ , F-K スペクトル  $u(\omega, \mathbf{k}_l)$  を  $u_l$  と書く.

(付 10)式および本文(18)式より, クロススペクトルと空間自己相関関数の関係に対する無相関項の影響は次式のように書ける.

$$S[x_\gamma] = E[C_\gamma] + o\left(\sqrt{\frac{V[x_\gamma]}{A}}\right) \quad (\text{付 30})$$

また, 本文(22)式のクロススペクトルの正規化において, 割り算の分母の項に含まれる推定誤差について検討するため, クロススペクトルの絶対値の 2 乗について考えると, この平均は次のように書ける. なお本文(22)式は 2 乗した値ではなく, 絶対値そのものが分母になっているが, 絶対値そのままでは取り扱いが困難なため, ここでは  $S[|x_\gamma|] = (S[|x_\gamma|^2])^{1/2}$  となることを仮定して, 絶対値の 2 乗平均について考えるものとする.

$$S[|x_\gamma|^2] = E[|x_\gamma|^2] + o\left(\sqrt{\frac{V[|x_\gamma|^2]}{A}}\right) \quad (\text{付 31})$$

(付 30), (付 31)式より, クロススペクトルおよびその絶対値の 2 乗の算術平均と空間自己相関関数の関係を得るためには, クロススペクトルの絶対値の 2 乗の期待値, クロススペクトルの絶対値の 4 乗の期待値と空間自己相関関数の関係を知る必要がある ((付 4)式より誤差項に含まれる分散はこれらの期待値より計算できる).

#### 付 4.1 準備

##### (1) F-K スペクトルと振動源の関係

振動源の総数を  $M$  とすると, 本文(15)式より, 位置  $\mathbf{r}$  の測定点とそこから  $\boldsymbol{\gamma}$  ずれた点とのクロススペクトルは次式で表せる.

$$x_\gamma = \sum_{l=1}^M |u_l|^2 \exp(-i\mathbf{k}_l \boldsymbol{\gamma}) \quad (\text{付 32})$$

$$+ \sum_{l \neq m} u_l u_m^* \exp(-i(\mathbf{k}_l(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{k}_m \mathbf{r}))$$

またこのとき, 空間自己相関関数と無相関項は以下の通りに表される.

$$C_\gamma = \sum_{l=1}^M |u_l|^2 \exp(-i\mathbf{k}_l \boldsymbol{\gamma}) \quad (\text{付 33})$$

$$N(\omega, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{l \neq m} u_l u_m^* \exp(-i(\mathbf{k}_l(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{k}_m \mathbf{r})) \quad (\text{付 34})$$

##### (2) F-K スペクトルの累乗の期待値に関する仮定

クロススペクトルの 2 乗の期待値およびクロススペクトルの 4 乗の期待値の評価をするため, 次の仮定をおく. この仮定が成り立つのであれば, 評価の手順は大幅に簡略化される.

$$E[|u_l|^m (u_l)^n] = 0 \quad (m \geq 0, n \geq 1) \quad (\text{付 35})$$

(付 35)式の仮定は, 単一速度の仮定が成り立ち, 異なる波数をもつ F-K スペクトル同士が全て互いに独立した別の振動源から発生しているのであれば, 自然に成り立つと考えられるものである. 以下, その説明を示す.

まず F-K スペクトルは次のように書くことができる.

$$u_l = |u_l| \exp(i\phi_l) \quad (\text{付 36})$$

ここに,  $\phi_l$ : F-K スペクトル  $u_l$  の位相

ここで, 我々は振動源に関する情報は何も持っていないので, 位相  $\phi_l$  は  $0 \leq \phi_l \leq 2\pi$  の範囲で一様にランダムな値を取り得ると仮定するしかない. このとき次式が成り立つ.

$$E[\exp(i\phi_l)] = 0 \quad (\text{付 37})$$

この複素指数関数の  $n$  乗を考えると,  $(\exp(i\phi_l))^n = \exp(in\phi_l)$  なので, この関数の偏角は  $0 \leq n\phi_l \leq 2\pi$  の範囲で一様にランダムな値をとると考えられ, その期待値はやはりゼロである (次式).

$$E[(\exp(i\phi_l))^n] = 0 \quad (n \geq 1) \quad (\text{付 38})$$

また,  $|u_l|$  は  $u_l$  に対応する振動源における加振力の大きさから,  $\phi_l$  は加振力の位相から, それぞれ独立に定まると考えられる. したがって, 次式が成り立つと仮定できる.

$$E[|u_l|^m (u_l)^n] = E[|u_l|^{m+n} (\exp(i\phi_l))^n] = E[|u_l|^{m+n}] E[(\exp(i\phi_l))^n] \quad (\text{付 39})$$

(付 38)式を(付 39)式に代入すると, (付 35)式が導ける.

##### (3) クロススペクトルの絶対値の 2 乗の期待値

クロススペクトルの絶対値の 2 乗は次の通りに書ける.

$$|x_\gamma|^2 = \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \sum_{o=1}^M (u_l u_m^* u_n^* u_o \times \exp(-i((\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_n) - \mathbf{r}(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_o)))) \quad (\text{付 40})$$

以下, 表記の簡略化のため, (付 40)式右辺の被和関数を  $f_{lmno}$  と書く. (付 35)式より,  $f_{lmno}$  の期待値がゼロとならないのは, 以下の 2 つのパターンのみである.

$l = m$ かつ $n = o$  :

このパターンに該当する  $(l, m, n, o)$  の集合を  $A$  とすると,

$$\sum_{(l,m,n,o) \in A} f_{lmno} = \sum_{l=1}^M \sum_{n=1}^M |u_l|^2 |u_n|^2 \exp(-i\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_m)) = |C_\gamma|^2 \quad (\text{付 41})$$

$l = n$ かつ $m = o$  :

このパターンに該当する $(l, m, n, o)$ の集合を $B$ とすると,

$$\sum_{(l,m,n,o) \in B} f_{lmno} = \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M |u_l|^2 |u_m|^2 = |C_0|^2 \quad (\text{付 42})$$

また集合 $A$ と集合 $B$ に重複して含まれる $(l, m, n, o)$ の組み合わせとして、 $l = m = n = o$ があり、このとき $f_{lmno} = |u_l|^4$ である。よって、クロススペクトルの絶対値の2乗の期待値は次のようになる。

$$E[|x_\gamma|^2] = E[|C_\gamma|^2] + E[|C_0|^2] - E[P] \quad (\text{付 43})$$

(付 43)式および本文(18)式( $E[x_\gamma] = E[C_\gamma]$ )より次式が成り立つ。

$$V[x_\gamma] = V[C_\gamma] + E[|C_0|^2] - E[P] \quad (\text{付 44})$$

ここで、 $|C_0|^2 = \sum |u_l|^2 |u_m|^2 = P + \sum_{l \neq m} |u_l|^2 |u_m|^2$ より、 $P \ll |C_0|^2$ とすれば、次式も成り立つ。

$$O(V[x_\gamma]) = O(V[C_\gamma] + E[|C_0|^2]) \quad (\text{付 45})$$

#### (4) クロススペクトルの絶対値の4乗の期待値

クロススペクトルの絶対値の4乗は次の通りに書ける。

$$\begin{aligned} |x_\gamma|^4 &= \sum (u_l u_m^* u_n^* u_o u_p^* u_q u_s^* u_v^* \\ &\quad \times \exp(-i((\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r})(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_s) \\ &\quad - \mathbf{r}(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_o - \mathbf{k}_q + \mathbf{k}_v)))) \end{aligned} \quad (\text{付 46})$$

2乗の場合と同様に、期待値がゼロになる $(l, m, n, o, p, q, s, v)$ の組み合わせと、そうならない組み合わせを考える。期待値がゼロにならない組み合わせのパターンは全部で24通りあり、被和関数の和が $|C_\gamma|^4$ となるのが4パターン、 $|C_0|^4$ となるのが4パターン、 $|C_\gamma|^2 |C_0|^2$ となるのが16パターンで、全てのパターンで $l = m = n = o = p = q = s = v$ となるパターンが重複している。以上まとめると、クロススペクトルの絶対値の4乗の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[|x_\gamma|^4] &= 4E[|C_\gamma|^4] + 4|C_0|^4 \\ &\quad + 16E[|C_\gamma|^2 |C_0|^2] - 23Q \end{aligned} \quad (\text{付 47})$$

ここに、 $Q := \sum_{l=1}^M E[|u_l|^8]$

ここで、 $P^2 = Q + \sum_{l \neq m} |u_l|^4 |u_m|^4$ より、 $Q \ll P^2 \ll |C_0|^4$ と仮定すると、次式も成り立つ。

$$\begin{aligned} O(V[|x_\gamma|^2]) \\ &= O(V[|C_0|^2 + |C_\gamma|^2] + E[(|C_0|^2 + |C_\gamma|^2)^2]) \end{aligned} \quad (\text{付 48})$$

#### 付 4.2 算術平均の評価

以上計算結果を(付 30)、(付 31)式に代入して整理すると、クロススペクトルおよびその絶対値の2乗の算術平均は以下の通りに表される。

$$S[x_\gamma] = E[C_\gamma] + O\left(\sqrt{\frac{V[C_\gamma] + E[|C_0|^2]}{A}}\right) \quad (\text{付 49})$$

$$\begin{aligned} S[|x_\gamma|^2] \\ &= E[|C_\gamma|^2] + E[|C_0|^2] - E[P] \\ &\quad + O\left(\sqrt{\frac{V[|C_0|^2 + |C_\gamma|^2] + E[(|C_0|^2 + |C_\gamma|^2)^2]}{A}}\right) \end{aligned} \quad (\text{付 50})$$

#### 付録 5. 比較的近年の位相速度推定手法: 長らの方法<sup>24)</sup>

長らの提案したこれらの方法は、SPAC法の拡張と捉えることができる。原理はSPAC法に類似しているが、一般的なSPAC法に比べると、センサアレイの中心に測定点を必要とせず低周波数側に高い感度を持つ手法などSPAC法の欠点を補うことのできる手法を含むため、近年適用が進みつつある<sup>25)</sup>。

原理をかいついで説明すると以下のようになる。長らの方法では、まず複素正弦関数で重み付けした微動データの方位積分を以下のように定義する。

$$z_m(t, \mathbf{r}) := \int_0^{2\pi} u(t, \mathbf{r}) \exp(-im\theta) d\theta \quad (\text{付 51})$$

単一の振動源の寄与が卓越し、かつ単一速度の仮定が成立するものとして、本文(3)式のフーリエ変換とHansenの積分表示((付 1)式)を組み合わせると、 $z_m(t, \mathbf{r})$ を時間軸に関してフーリエ変換した結果は、以下のように書ける。

$$z_m(\omega, \mathbf{r}) = 2\pi \exp\left(im\frac{\pi}{2}\right) J_m(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|) \quad (\text{付 52})$$

これを用いて、長らは次のような関係を導いた。

$$\rho_{CCA} = \frac{z_0(\omega, \mathbf{r}) z_0^*(\omega, \mathbf{r})}{z_1(\omega, \mathbf{r}) z_1^*(\omega, \mathbf{r})} = \left(\frac{J_0(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)}{J_1(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)}\right)^2 \quad (\text{付 53})$$

$$\rho_{H0} = \frac{z_0(\omega, \mathbf{r}) z_0^*(\omega, \mathbf{r})}{z_1(\omega, 0) z_1^*(\omega, 0)} = \left(J_0(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)\right)^2 \quad (\text{付 54})$$

$$\rho_{H1} = \frac{z_1(\omega, \mathbf{r}) z_1^*(\omega, \mathbf{r})}{z_0(\omega, 0) z_0^*(\omega, 0)} = \left(J_1(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)\right)^2 \quad (\text{付 55})$$

$$\rho_V = \frac{z_0(\omega, 0) z_0^*(\omega, \mathbf{r})}{z_1(\omega, \mathbf{r}) z_1^*(\omega, \mathbf{r})} = \frac{J_0(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)}{\left(J_1(\tilde{k}\|\boldsymbol{\gamma}\|)\right)^2} \quad (\text{付 56})$$

以上の式において、中辺は微動の実測データより(近似的に)計算できるので、その値と整合するような $\tilde{k}$ を右辺の式より求めれば、微動波動場の卓越波数が得られる。特に(付 53)式を用いるCCA法は、センサアレイ中心に測定点を必要としないため、SPAC法の適用が難しいようなサイトでもCCA法なら適用が可能である場合があり、長らの方法の中でも代表的な方法とされている。