

## 地震時刻歴の周波数微分と経時特性の関係を統計量を用いずに説明する理論

## A THEORY OF THE RELATIONSHIP BETWEEN FREQUENCY DIFFERENTIATION AND TEMPORAL CHARACTERISTICS OF SEISMIC RECORDS WITHOUT USING STATISTICAL QUANTITY

成田 修英\*1  
Nobuhide NARITA

In this paper, I show a deterministic theory of the relationship between frequency differentiation and temporal characteristics of seismic records. The relationship is derived by first order approximation of Fourier amplitude of seismic records in frequency domain. By using the relationship, we can uniquely determine envelopes of band pass filtered seismic waves whose band is narrow enough to apply first order approximation. Specifically, the phase gradient can determine the center of the envelope, the amplitude gradient can determine the width of the envelope, and the type of the band pass filter can determine the shape of the envelope.

For the above, my theory can remove ambiguity of conventional explanations using statistical quantity. I think my theory works better than the conventional explanations for generating simulated earthquake ground motions.

**Keywords :** Earthquake, Temporal characteristics, Group delay time, First approximation  
地震動, 経時特性, 群遅延時間, 一次近似

## 1. はじめに

地震動などのフーリエ変換可能な非定常な時系列の群遅延時間（フーリエ位相の角周波数微分にマイナス1をかけた値）の平均は、時刻歴波形の時間的重心に対応することが知られている<sup>例えは1)</sup>。この性質は、ある特定の周波数帯域に限定しても成り立つので、これを利用して所要の周波数的非定常性を持つ時系列が作成できる。この事実は、構造計算用の模擬地震動の作成にも応用されている<sup>2),3)</sup>。

しかしながら、この群遅延時間（および群遅延時間を含む地震動の周波数微分）の性質については、応用面での研究は進んでいるものの、理論的な側面では、十分な理解が得られているとは言い難い。例えば、フーリエ振幅の角周波数微分がどのように経時特性に影響するかについては、先行研究でも、無視する立場<sup>4)</sup>と考慮すべきとする立場<sup>5),6)</sup>に見解が分かれている。また、群遅延時間を含む周波数微分量の計算方法についても、今なお研究が続けられている<sup>6)-8)</sup>。つまり、理論的に未整備で、それが応用上の混乱を招いている部分がある。この混乱の一因として、地震動の周波数微分と経時特性の間の対応関係が、常に平均や分散などの統計量を介するものとして理解されていることが挙げられる。統計量を用いた分析は、不確定要因を含むデータの分析方法として強力ではあるが、統計的な代表値と実際の標本との差異が、統計的なばらつきによるものか想定外の要因によるものか、判別が難しい。

そこで本報告では、地震動の周波数微分と経時特性との、「平均」と「重心」の関係よりも、直接的な関係について説明する。具体的には、十分に狭い帯域のバンドパス・フィルター透過波の包絡線が、その帯域の複素フーリエ振幅の周波数微分によって、決定論的に一意に表されることを示す。このような「十分に狭い帯域」を、以下「極狭帯域」と呼び、極狭帯域の波を「極狭帯域波」と呼ぶ（これらの厳密な定義は2章で述べる）。

## 2. 極狭帯域波の経時特性についての理論

## 2.1 基礎理論

## (1) 極狭帯域波の定義

検討の対象とする地震の時刻歴波形を $u(t)$ とし、そのフーリエ変換を $U(\omega)$ とする。 $u(t)$ と $U(\omega)$ 相互の関係は以下の通りである。

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt =: \mathcal{F}[u(t)] \quad (1)$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t} d\omega =: \mathcal{F}^{-1}[U(\omega)] \quad (2)$$

ここに、 $i$ は虚数単位（ $=\sqrt{-1}$ ）、 $A = B$ は左辺の記号 $A$ を右辺 $B$ で定義すること（ $A = B$ は記号 $B$ を $A$ で定義すること）、 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれフーリエ変換・逆変換の略記を表す。

$U(\omega)$ は、次のように振幅 $A(\omega)$ と位相 $\theta(\omega)$ に分けて考える。

$$U(\omega) = A(\omega) \exp(i\theta(\omega)) \quad (3)$$

ここに、 $A(\omega)$ 、 $\theta(\omega)$ は共に実数である（本報での振幅 $A(\omega)$ は、負の値も許容するものとする。理由は付録1にて述べる）。さらに、これらの検討対象とする角周波数 $\omega_c$ まわりのテイラー展開を考える。

$$A(\omega) = A(\omega_c) + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega - \omega_c)^n A_c^{(n)} \quad (4)$$

$$\theta(\omega) = \theta(\omega_c) + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega - \omega_c)^n \theta_c^{(n)} \quad (5)$$

$$A_c^{(n)} := \left. \frac{d^n A(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (6)$$

$$\theta_c^{(n)} := \left. \frac{d^n \theta(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (7)$$

\*1 戸田建設株式会社技術研究所 博士（工学）

このとき、以下の条件を満たす十分に狭い帯域幅 $b$ が存在するはずである。

$$A(\omega) \simeq A_c + (\omega - \omega_c)A'_c \quad (|\omega - \omega_c| \leq b) \quad (8)$$

かつ、

$$\theta(\omega) \simeq \theta_c + (\omega - \omega_c)\theta'_c \quad (|\omega - \omega_c| \leq b) \quad (9)$$

ここに、 $A(\omega_c) = A_c, \theta(\omega_c) = \theta_c, A'_c = A'_c, \theta'_c = \theta'_c$ である。

(8),(9)式を満たすような帯域幅 $b$ が「極狭帯域」の厳密な定義である。

「極狭帯域」の定義ができたので、「極狭帯域波」も定義できる。

まず、次式のような極狭帯域で切り出される波 $u_r(t, \omega_c)$ を考える。

$$u_r(t, \omega_c) := \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - b}^{\omega_c + b} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (10)$$

ここで、幅 $1$ 、中心 $0$ の標準的な矩形窓を $\text{rect}(x)$ とおくと、 $u_r(t, \omega_c)$ は以下のようにも書ける。

$$\begin{aligned} u_r(t, \omega_c) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2b}\right) U(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2b}\right) U(\omega)\right] \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式の右边を次のように一般化し、この操作によって抽出される極狭帯域の波を、「極狭帯域波  $u_w(t, \omega_c)$ 」とする。

$$u_w(t, \omega_c) = \mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega - \omega_c)U(\omega)] \quad (12)$$

ここに、 $W_b(\omega)$ は $\text{rect}((\omega - \omega_c)/2b)$ を含む幅 $2b$ の窓関数を表す。また $W_b(\omega)$ は $\text{rect}((\omega - \omega_c)/2b)$ を含む単峰型の偶関数とする（これは、 $W_b(\omega)$ を乗じることによる $U(\omega)$ の歪みを最小限に抑えるための条件である）。

$u_w(t, \omega_c)$ は、その具体例として $u_r(t, \omega_c)$ を含んでいるので、一般化された極狭帯域である $u_w(t, \omega_c)$ の満たす性質は、 $u_r(t, \omega_c)$ も満たす。「 $u_r(t, \omega_c)$ の方が $u_w(t, \omega_c)$ よりも『狭帯域の波』の直感的なイメージに合致しており、具体的に分かりやすいのに、どうせ似たようなものなら何故 $u_w(t, \omega_c)$ を使うのか?」と思う読者も居るかも知れないが、 $u_w(t, \omega_c)$ の形（(12)式の形）に一般化することでフーリエ変換一般に関する既往の知見が利用できるようになり、理論的な取り扱いには、むしろ容易になる。

## (2) 極狭帯域波の時刻歴波形

極狭帯域波 $u_w(t, \omega_c)$ の時刻歴波形は、極狭帯域のパラメータ $(\omega_c, A_c, A'_c, \theta_c, \theta'_c)$ と極狭帯域を切り出す窓関数の逆フーリエ変換によって決定される単純な関数で表すことができる。以下にその導出を示す。

まず、 $U_w(\omega, \omega_c) := W_b(\omega - \omega_c)U(\omega)$ とする。 $U(\omega)$ の振幅と位相に極狭帯域の近似（(8),(9)式）を適用すると、 $U_w(\omega_c)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} U_w(\omega, \omega_c) &\simeq W_b(\omega - \omega_c)(A_c + (\omega - \omega_c)A'_c) \\ &\quad \times \exp\left(i(\theta_c + \theta'_c(\omega - \omega_c))\right) \end{aligned} \quad (13)$$

したがって、この逆フーリエ変換 $u_w(t, \omega_c)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_w(t, \omega_c) &\simeq e^{i\theta_c} \left( A_c \mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega - \omega_c) \exp(i\theta'_c(\omega - \omega_c))] \right. \\ &\quad \left. + A'_c \mathcal{F}^{-1}[(\omega - \omega_c)W_b(\omega - \omega_c) \exp(i\theta'_c(\omega - \omega_c))] \right) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式右辺にフーリエ変換のシフト則を適用すると、以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega - \omega_c) \exp(i\theta'_c(\omega - \omega_c))] \\ = e^{i\omega_c t} \mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega}] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[(\omega - \omega_c)W_b(\omega - \omega_c) \exp(i\theta'_c(\omega - \omega_c))] \\ = e^{i\omega_c t} \mathcal{F}^{-1}[\omega W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega}] \\ = -ie^{i\omega_c t} \mathcal{F}^{-1}[i\omega(W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega})] \end{aligned} \quad (16)$$

(15)式のフーリエ変換については、畳み込み定理を逆に使うと以下の通りになるので、

$$\mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega}] = (\mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{i\theta'_c \omega}])(t) \quad (17)$$

ここに、 $(f * g)(x)$ は2つの関数 $f$ と $g$ の変数 $x$ に関する畳み込み積分を表す。

$\mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega)] =: w_b(t)$ とおくと、次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega}] &= (w_b(t) * \delta(t + \theta'_c))(t) \\ &= w_b(t + \theta'_c) \end{aligned} \quad (18)$$

(16)式のフーリエ変換については、フーリエ変換の微分法則より、次式が成り立つので、

$$\mathcal{F}^{-1}[i\omega(W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega})] = \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1}[W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega}] \quad (19)$$

これと(18)式を組み合わせて次式が得られる。

$$\mathcal{F}^{-1}[i\omega(W_b(\omega) e^{i\theta'_c \omega})] = \frac{dw_b(t + \theta'_c)}{dt} \quad (20)$$

以下、 $w_b(t + \theta'_c)$ の時間微分を $\dot{w}_b(t + \theta'_c)$ と略記する。(18),(20)式を(15),(16)式に代入し、それをさらに(14)式に代入すると、極狭帯域波を表す近似関数が、次の通りに得られる。

$$u_w(t, \omega_c) \simeq (A_c w_b(t + \theta'_c) - iA'_c \dot{w}_b(t + \theta'_c)) e^{i(\omega_c t + \theta_c)} \quad (21)$$

よって、極狭帯域波の振幅の包絡線は以下の通りに表せる。

$$|u_w(t, \omega_c)| \simeq \sqrt{(A_c w_b(t + \theta'_c))^2 + (A'_c \dot{w}_b(t + \theta'_c))^2} \quad (22)$$

偶関数、奇関数の性質より $w_b^2(t + \theta'_c), \dot{w}_b^2(t + \theta'_c)$ はともに偶関数であり、 $t + \theta'_c = 0$ となる $t$ 、つまり $t = -\theta'_c$ を時間的重心に持つ。したがって(21)式より、極狭帯域波の振幅の包絡線 $|u_w(t, \omega_c)|$ は、 $t = -\theta'_c$ を時間的重心に持つ。ここで言う $-\theta'_c$ とは、極狭帯域の中心周波数における群遅延時間を意味するので、以上考察より、極狭帯域波と群遅延時間の関係も確認できたことになる。

今後の議論のため、極狭帯域の仮定に基づく近似関数（(21)式右辺）を真の極狭帯域波と区別して $\hat{u}_w(t, \omega_c)$ と書くことにし、その包絡線も次式のように $b$ と $A_c$ で正規化して書くこととする。

$$|\hat{u}_w(t, \omega_c)| = bA_c \sqrt{\left(\frac{w_b(t + \theta'_c)}{b}\right)^2 + \left(\frac{bA'_c \dot{w}_b(t + \theta'_c)}{A_c b^2}\right)^2} \quad (23)$$

## 2.2 代表的な窓関数による極狭帯域波の包絡線

### (1) 概要

2.1で示した(22),(23)式の形が、最も一般的な極狭帯域波の包絡線の表現である。しかし具体的な極狭帯域波の特徴を定量的に評価するためには、窓関数一般では無く、特定の具体的な窓関数を設定する必要がある。代表的な窓関数による極狭帯域波の包絡線の具体例として、窓関数 $W_b$ に矩形窓・Parzen窓を用いた結果を示す。

(2) 矩形窓の逆フーリエ変換と極狭帯域波の近似包絡線

$$W_b(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq b) \\ 0 & (|\omega| > b) \end{cases} \quad (24)$$

矩形窓のフーリエ変換<sup>(例えは9)</sup>より、 $w_b(t)/b$ と $\dot{w}_b(t)/b^2$ は以下の通りとなる。

$$\frac{w_b(t)}{b} = \frac{2 \sin(bt)}{bt} \quad (25)$$

$$\frac{\dot{w}_b(t)}{b^2} = 2 \left( -\frac{\sin(bt)}{(bt)^2} + \frac{\cos(bt)}{bt} \right) \quad (26)$$

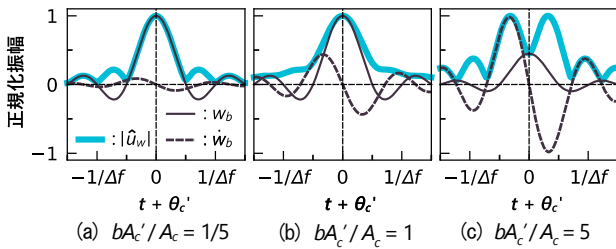


図1 矩形窓による極狭帯域波の例 (最大振幅を1に正規化)

図1において、 $\Delta f := b/2\pi$ である。同図より、極狭帯域波の時間的重心は、 $t = -\theta_c'$ にあることが確認できる。また同図より、 $A_c'$ が大きいほど $\dot{w}_b$ の寄与が大きくなり、 $\hat{u}_w$ の時間的な広がりが大きくなることが分かる。

(3) Parzen 窓の逆フーリエ変換と極狭帯域波の近似包絡線

$$W_b(\omega) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\omega}{b}\right)^2 + 6\left|\frac{\omega}{b}\right|^3 & (|\omega| < \frac{b}{2}) \\ 2\left(1 - \left|\frac{\omega}{b}\right|\right)^3 & (\frac{b}{2} \leq |\omega| \leq b) \end{cases} \quad (27)$$

Parzen 窓のフーリエ変換<sup>10)</sup>より、 $w_b(t)/b$ と $\dot{w}_b(t)/b^2$ は以下の通りとなる。図2と図1の比較より、Parzen 窓でも定性的な傾向は矩形窓と変わらないことが分かる。

$$\frac{w_b(t)}{b} = \frac{3}{4} \left( \frac{\sin\left(\frac{bt}{4}\right)}{\frac{bt}{4}} \right)^4 \quad (28)$$

$$\frac{\dot{w}_b(t)}{b^2} = \frac{3}{4} \left( \frac{\sin\left(\frac{bt}{4}\right)}{\frac{bt}{4}} \right)^3 \left( -\frac{\sin\left(\frac{bt}{4}\right)}{\left(\frac{bt}{4}\right)^2} + \frac{\cos\left(\frac{bt}{4}\right)}{\frac{bt}{4}} \right) \quad (29)$$

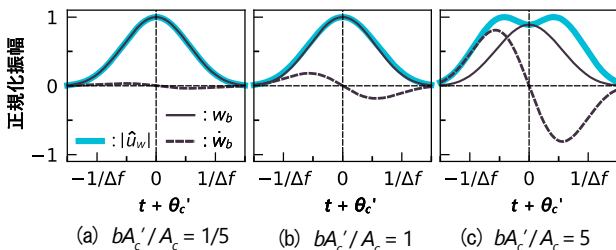


図2 Parzen 窓による極狭帯域波の例 (最大振幅を1に正規化)

3. 模擬波による理論の検証

2章で述べた内容を検証するため、模擬波を作成し、模擬波の極狭帯域波を定義 ((12)式) 通りに計算して求めた $u_w$ と(21)式の近似

式による結果 $\hat{u}_w$ とを比較する。簡単のため、極狭帯域波の切り出しは全て矩形窓によって行う。

3.1 検証計算の方法

(1) 極狭帯域波の包絡線の計算

これまで特に言及していなかったが、(12)式の定義に基づく極狭帯域波は、負の周波数の情報を含まないため複素数信号となり、時間領域における波の包絡線は、その絶対値をとることでそのまま計算できる。

補足すると、本報告の定義に基づく極狭帯域波ではない一般的なバンドパス・フィルタ透過波は、負の周波数の情報も与えて虚部を除去するので、極狭帯域波の記号を用いて書くと次のようになる。

$$y_w(t, \omega_c) = u_w(t, \omega_c) + u_w(t, -\omega_c) \quad (30)$$

ここに、 $y_w(t, \omega_c)$ は $\omega_c$ 周りの一般的なバンドパス・フィルタ透過波を表す。

また、(12)式の $u_w(t, \omega_c)$ の定義および(30)式にある $y_w(t, \omega_c)$ と $u_w(t, \omega_c)$ の関係より、 $y_w(t, \omega_c)$ と $u_w(t, \omega_c)$ は時系列信号処理の理論における実信号と解析信号 (正確には解析信号の1/2) の関係<sup>(例えは11)</sup>となり、次式の関係も成り立つ。

$$u_w(t, \omega_c) = \frac{1}{2} (y_w(t, \omega_c) + \mathcal{H}[y_w(t, \omega_c)]) \quad (31)$$

ここに、 $\mathcal{H}[f]$ は関数 $f$ のヒルベルト変換を表す。

(2) 位相勾配と振幅勾配の計算

以下の検証において、3.2 では予め設定した位相勾配と振幅勾配に対して推定包絡線を計算するので、これらを計算する余地はない。3.3 では、模擬波の時刻歴を計算し、その経時特性を分析するので、位相勾配と振幅勾配の計算も必要となる。この計算は、成田 (2020)<sup>8)</sup>の方法に基づいて行う。また3.3の計算では、簡単のため、常に $A = |U|$ とする。

この方法の原理は、以下の通りである。まず、複素フーリエ振幅 $U(\omega)$ の周波数微分と、 $U(\omega)$ の振幅・位相の周波数微分との関係は、(3)式より次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dU(\omega)}{d\omega} &= \frac{dA(\omega)}{d\omega} \exp(i\theta(\omega)) + i \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} U(\omega) \\ &= \left( \frac{1}{A(\omega)} \frac{dA(\omega)}{d\omega} + i \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \right) U(\omega) \end{aligned} \quad (32)$$

一方、フーリエ変換の微分法則より次式が成り立つ。

$$\frac{dU(\omega)}{d\omega} = -i\mathcal{F}[tu(t)] \quad (33)$$

(32),(33)式を組み合わせると、次式が導ける。

$$\mathcal{F}[tu(t)] = \left( -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} + \frac{i}{A(\omega)} \frac{dA(\omega)}{d\omega} \right) U(\omega) \quad (34)$$

よって、以下の関係が成り立つ。

$$-\theta_c'(A(\omega))^2 = \Re(\mathcal{F}[tu(t)]U^*(\omega)) \Big|_{\omega=\omega_c} \quad (35)$$

$$\frac{A_c'}{A_c} (A(\omega))^2 = \Im(\mathcal{F}[tu(t)]U^*(\omega)) \Big|_{\omega=\omega_c} \quad (36)$$

ここに、 $\Re(z)$ は複素数 $z$ の実部、 $\Im(z)$ は複素数 $z$ の虚部を表す。

この原理を用いると、 $-\theta'_c$ と $A'_c/A_c$ の $A_c^2$ による重み付け平均は次のようになる。

$$M_A[-\theta'_c] = \Re \left( \frac{\int \mathcal{F}[tu(t)]U^*(\omega)d\omega}{\int (A(\omega))^2 d\omega} \right) \quad (37)$$

$$M_A \left[ \frac{A'_c}{A_c} \right] = \text{sgn}(A'_c) \frac{\int \Im[\mathcal{F}[tu(t)]U^*(\omega)]d\omega}{\int (A(\omega))^2 d\omega} \quad (38)$$

ここに、 $M_A[f]$ は関数 $f$ の $(A(\omega))^2$ による重み付き平均、 $\text{sgn}(x)$ は変数 $x$ の符号（正なら+1、負なら-1）を表す。

(37),(38)式を用いて、極狭帯域幅の位相勾配と振幅勾配を計算する。これらの式において、 $U^*(\omega), A(\omega)$ は元の時刻歴波形 $u(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[u(t)]$ より得ることができ、 $\mathcal{F}[tu(t)]$ は $u(t)$ に $t$ をかけた結果をフーリエ変換することで得られる。このとき重み付き平均をとる周波数幅は、極狭帯域の幅とする。

なお、振幅勾配の重み付き平均は、(38)式よりも単純な形式として、次式で表すことも出来る。ただしここでは、(39)式よりも(38)式による平均化の方が、適切である。

$$M_A \left[ \frac{A'_c}{A_c} \right] = \Im \left( \frac{\int \mathcal{F}[tu(t)]U^*(\omega)d\omega}{\int (A(\omega))^2 d\omega} \right) \quad (39)$$

$A'_c/A_c$ の重み付き平均という意味では、(38)式も(39)式も同じだが、(39)式は平均化の過程で $A'_c$ が正の周波数と負の周波数の値が打ち消し合う。 $A'_c$ が極狭帯域波の包絡線形状に与える影響は、符号の正負によらず絶対値が大きいほど包絡線の時間的な広がりが大きくなる形で現れる((23)式参照)ため、極狭帯域波への影響を評価する目的には、符号の正負で振幅の相殺が生じない(38)式による平均化方法の方が適している。

### 3.2 模擬波1: 極狭帯域の仮定を厳密に満たす波

図3のような周波数特性を持つ模擬波を想定し、同図の1Hz近傍を切り出した極狭帯域波について $|u_w|$ と $|\hat{u}_w|$ を比較する。 $A_c = 1 \text{ cm/s}^2 \cdot \text{s}$ 、 $\theta'_c = -200 \text{ s}$ 、 $\Delta f = 0.04 \text{ Hz}$ とし、 $bA'_c/A_c$ は1/5, 1, 5の3ケースで実施する。 $bA'_c/A_c = 5$ のケースでは、評価対象帯域の一部で $A < 0$ となるが、前述の通り、本報の理論では、これは特に問題ない。

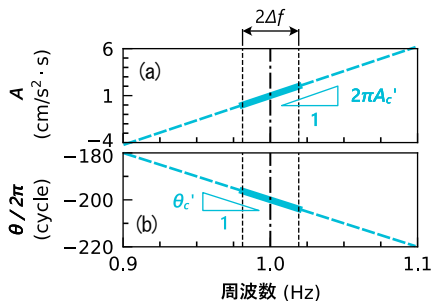


図3 模擬波1の周波数特性

100Hz サンプリング、データ長 655.36 秒を想定して、 $|u_w|$ と $|\hat{u}_w|$ を計算した結果を図4に示す。同図より、両者良く整合しており、 $\hat{u}_w$ の式((21)式右辺)の妥当性が確認できる。

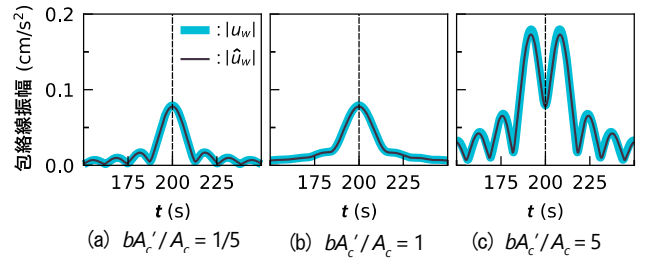


図4 模擬波1の $|u_w|$ と $|\hat{u}_w|$

### 3.3 模擬波2: 現実的な地盤振動

表1の地盤の地表面に図5の鉛直方向点加振を与え、加振点から1km離れた点の鉛直方向の応答を計算、それを検証用の模擬波とする。地盤振動の計算には、薄層法<sup>12)</sup>を用い、要素分割幅は各層5Hzのせん断波長の1/20とした。底面境界は、バラキシャル境界である。図5の模擬加振力は0.5~5Hzの4.5Hz幅のParzen窓形の周波数特性を持つ加振力であり、計算開始時刻から20秒後に瞬間最大振幅10kNが発生するように調整している。このような地盤と加振力のモデルに対し、100Hz サンプリング継続時間163.84秒の模擬地盤応答を計算する。また、本検討では、 $\Delta f = 0.125 \text{ Hz}$ とする。「極狭帯域」の幅としてはやや広いが、極狭帯域波の包絡線の時間幅が広がり過ぎると、元の時刻歴波形との対応が視覚的に分かり辛くなるので、ここでは時間軸上の対応関係の見易さを優先した。

表1 地盤モデル

層番号	下端深度 (m)	質量密度 ( $\text{t/m}^3$ )	せん断波速度 (m/s)	ポアソン比	減衰定数 (%)
1	5	1.8	100	0.45	2
2	15		150		
3	50		300		
4	100		600		
5	500	2.0	1,000		1

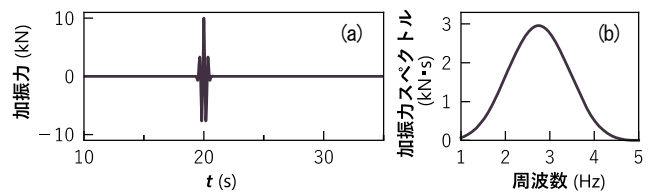


図5 模擬波2の元となる加振力

応答計算の結果を図6に示す。同図(a), (b)より、地盤を伝わる波の分散性により、周波数ごとの波の到達時刻に差が生じ、波の包絡線が広がっていることが確認できる。また同図(c)より、波の波数成分(薄層法ではモード)ごとの距離減衰特性の違いや異なる波数成分同士の干渉により、振幅の周波数分布に、加振力の周波数分布には無い顕著な山谷が生じていることも確認できる。実地震に比べればまだ大分単純ではあるが、3.2の模擬波1に比べれば、現実的な模擬波になっている。なお、同図(b)は、極狭帯域波の包絡線を、帯域ごとに最大振幅で正規化し、束ねてコンターとして描いたもので

あり、外見上はランニング・スペクトルに似ているが、ランニング・スペクトルとは異なる。ランニング・スペクトルは短時間ごとにデータを区切って、各時間帯の周波数特性を見るのに対し、同図(b)は狭い帯域でデータを区切って、各帯域の経時特性を表示しており、ランニング・スペクトルとは、時間と周波数の関係が入れ替わっている。

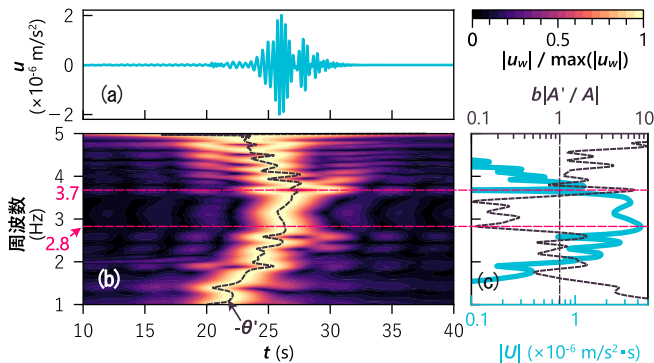


図6 模擬波 2 と模擬波 1 における  $|u_w|, A', \theta'$

観測点における応答振幅が大きく、数値的な誤差の影響が小さいと考えられる 2~4Hz の間で、振幅に対する振幅勾配の割合が特に大きい 3.7Hz 近傍の極狭帯域波の包絡線と、特に小さい 2.8Hz 近傍の極狭帯域波の包絡線を、模擬波の  $\theta', A'$  から算出した包絡線の理論的推定値  $|\hat{u}_w|$  と比較して、図 7 に示す。縦軸は最大振幅で割って正規化している。同図より、図 6 に示されるような、現実的な地盤振動においても、 $|u_w|$  と  $|\hat{u}_w|$  は良く整合することが確認できる。

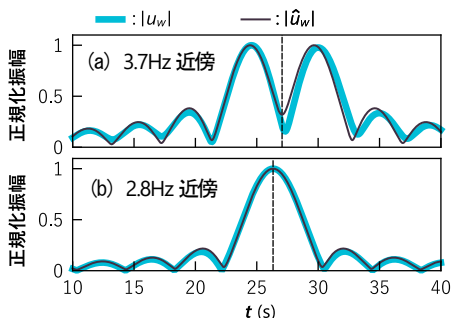


図7 模擬波 2 における極狭帯域波の包絡線

ただし、図 7 の結果は 3.7Hz 近傍の包絡線 (同図(a)) について、 $|u_w|$  と  $|\hat{u}_w|$  の乖離がやや目立つ結果となっている。このことについて検討するため、図 8 に 3.7Hz 近傍の  $A$  と  $A'$  を極狭帯域幅 (ここでは、 $\Delta f = 0.125\text{Hz}$ ) で示す。

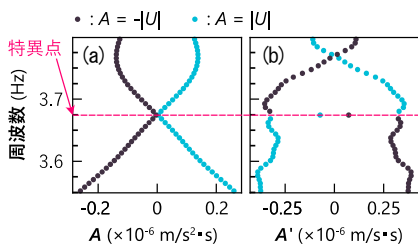


図8 3.7Hz (図7(a)) 近傍の  $A, A'$  (平均化していない値)

同図より、3.7Hz 近傍の極狭帯域内部に特異点 (付録 1 も参照) が含まれていること、また帯域内での  $A'$  の変動が大きく、極狭帯域の仮定条件 (帯域内で  $\theta', A'$  が一定の条件) が破れていること、2 点が分かる。この 2 点が、図 7(a)における  $|u_w|$  と  $|\hat{u}_w|$  の乖離の原因と考えられる。今後、「極狭帯域」として適切な帯域幅の評価方法と、特異点の処理方法を整備する必要がある。

## 4. 議論・考察

### 4.1 位相勾配・振幅勾配の統計量について

ある特定の周波数近傍の経時特性を評価したければ、評価対象周波数を中心とした極狭帯域の位相勾配・振幅勾配を考えれば良い。フーリエ変換の可能性の条件より、複素フーリエ振幅は周波数に対して滑らかであるので、考慮の対象とする帯域幅を際限なく狭めて行けば、(評価対象周波数が特異点である場合を除いて) 必ずどこかで極狭帯域の仮定 ((8), (9)式) を満たす十分に狭い幅が見つかるはずであり、極狭帯域の内部では位相勾配と振幅勾配は一定なので、統計量の入り込む余地はない。

しかしながら、実地震記録を分析するにあたっては、平滑化した周波数特性を見たい場合や、ある程度広い帯域の平均的な特性を評価対象とすることで情報を圧縮したい場合があるであろう。特に模擬地震動作成への応用においては、情報の圧縮が重要だと考えられる。設計に用いる模擬地震動は、想定される震源や伝播経路に対する典型的な地震である必要があり、適切な平均化により、個々の地震記録に含まれる非典型的な要素が、除去されている必要がある。この意味で、位相勾配・振幅勾配の統計量を評価することには、十分に実用的な意義がある。ただし、統計量を評価するとして、それが平均と分散が良いのか、あるいは平均と分散「だけ」で良いのかという事については、議論の余地がある。例えば、観測点への波の到達時刻のばらつき (周波数ごとの違い) には、震源における加振力の特性に起因する要素と、伝播経路における波の分散性に起因する要素 (図 6(b)参照) の 2 つが寄与していると考えられるが、このうち少なくとも波の分散性によるばらつきについては、伝播経路 (地盤) の特性によって決定論的に定まる値であるため、統計量としての分散で表現するのは不適切だと考えられる。

### 4.2 振幅勾配は考慮すべきか

2 章、3 章の結果より、振幅勾配が無視できないのは、解析的にも数値的にも明らかである。しかし、模擬地震動作成への応用を考えると、この問題はそれほど自明では無い。位相勾配だけで模擬地震動の経時特性が決まるのであれば、振幅は構造設計上の要請に従って設定すれば良いことになるが、経時特性を決定するのに振幅勾配も必要という事になると、振幅勾配が決まれば振幅もほとんど決まってしまうので、振幅の調整代が無くなり、設計に適した模擬地震動を作成するのが困難になる。

つまり、振幅勾配の影響は、考慮すべきではあるが、設計用模擬地震動に反映するのが難しい要素であると言える。この問題に対する検討は、今後の課題とする。



## 5. まとめ

本報では、ごく狭い帯域のバンドパス・フィルター透過波の包絡線が、その帯域の中心周波数における位相と振幅の周波数勾配によって、決定論的に表現できることを示した。

ただし、このような「ごく狭い帯域」の評価方法と、位相勾配・振幅勾配の評価過程にしばしば現れる特異点の処理方法については未だ整備できていない。また、振幅勾配を波の包絡線の関係に基づいて定めてしまうと、振幅の周波数特性を設計用の模擬波として適した形に調整できないという問題もある。これら応用上の未解決問題について、今後検討を進める必要がある。

## 謝辞

本研究は、民間7社（安藤・間、熊谷組、佐藤工業、戸田建設、西松建設、フジタ、前田建設工業）による共同研究「来るべき巨大地震の強震動予測」での議論に端を発したものである。委員各位および工学院大学 久田嘉章教授には多くの貴重な意見を頂いた。ここに記して謝意を表する。

## 参考文献

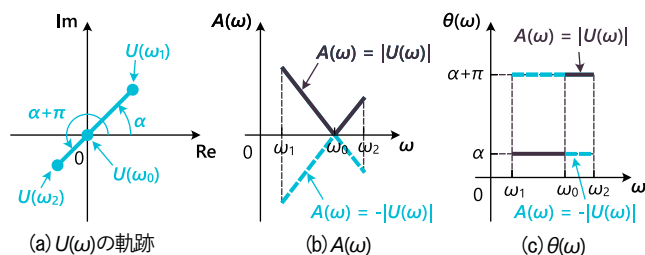
- 1) L. コーエン (吉川昭, 佐藤俊輔 訳) 「時間 - 周波数解析」, 朝倉書店, pp. 1-26, 1998
- 2) 佐藤智美, 佐藤俊明, 植竹富一, 菅原良次 「群遅延時間を用いたやや長周期地震動の経時特性評価のための基礎的研究」, 日本建築学会構造系論文集, 第 480 号, pp. 57-65, 1996, DOI: 10.3130/aajs.61.57\_2
- 3) 国土交通省 「超高層建築物等における南海トラフ沿いの巨大地震による長周期地震動への対策について」, <[https://www.mlit.go.jp/jutakukentiku/build/jutakukentiku\\_house\\_fr\\_000080.html](https://www.mlit.go.jp/jutakukentiku/build/jutakukentiku_house_fr_000080.html)> (参照 2022-8-11)
- 4) 佐藤智美, 植竹富一, 菅原良次, 「群遅延時間を用いたやや長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究」, 日本建築学会構造系論文集, 第 493 号, pp. 31-39, 1997, DOI: 10.3130/aajs.62.31\_1
- 5) 和泉正哲, 勝倉裕 「地震動の位相情報に関する基礎的研究」, 日本建築学会論文報告集, 第 327 号, pp. 20-28, 1983
- 6) 前田寿朗, 佐々木文夫, 山本佳史 「Sinc ウェーブレットを用いた非定常性を有する模擬地震動作成手法の研究」, 日本建築学会構造系論文集, 第 553 号, pp. 33-40, 2002, DOI: 10.3130/aajs.67.33
- 7) 野津厚 「地震動位相の微分可能性に関する考察と群遅延時間の数値計算法の改良」, 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学), Vol. 73, No. 1, pp. 187-194, 2017, DOI: 10.2208/jscejsece.73.187
- 8) 成田修英 「地震記録の群遅延時間を差分近似無しで計算する方法」, 日本建築学会大会 (関東) 学術講演梗概集, pp. 189-190, 2020
- 9) HSU, Hwei P. (村崎憲雄, 間多均, 鮑本一裕 訳) 「マグロウヒル大学演習 信号処理 (II)」, オーム社, P. 11, 1998
- 10) PARZEN, Emanuel "Mathematical Considerations in the Estimation of Spectra", Technometrics, Vol. 3, No. 2, pp. 167-190, 1961, DOI: 10.2307/1266111
- 11) 金井浩 「音・振動のスペクトル解析」, コロナ社, pp. 295-297, 1999
- 12) 田治見宏, 下村幸男 「3 次元薄層要素による建物-地盤系の動的解析」, 日本建築学会論文報告集, 第 243 巻, pp. 41-51, 1976, DOI: 10.3130/aajsaxx.243.0\_41

## 付録 1. 負の振幅について

適切な用語が無いので「負の振幅」としたが、当然 $|U|$ が負の値を取り得るという事ではない。本文(3)式のように $A$ を定義したときに、 $A = -|U|$ であるような場合も許容するという事である。もちろん場合によっては、 $A = |U|$ である。 $|U|e^{i(\theta+\pi)} = -|U|e^{i\theta}$ であり、位相側で辻褃合わせができるため、 $A$ が正でも負でも計算上問題は生じない。一方、 $A$ が負の値を取ることを認めない場合、本文図 8 に

示した通り、 $A = 0$ の周波数で $A$ が微分不可能になるし、その前後で $A'$ の値が不連続になる。また、 $\omega_1$ と $\omega_2$ の間に $|U(\omega)|$ の零点がある場合、 $A$ が負の値を取ることを認めなければ、零点の前後で位相に $\pi$ の不連続が生じる (付図 1 参照、この不連続は野津 (2017)<sup>7)</sup> も指摘している) が、零点の前後で $A = |U|$ と $A = -|U|$ を切り替えれば、これも回避できる。

ただし、 $A$ を数値的に評価するときに、その正負を具体的にどう決定すべきかについて、具体的なアイデアは未だまとまっていない。現状では、理論的な検討において零点前後の特異点を考慮せず済ませるために、(具体的にどのようなルールでそうなるかは分からないが)「 $A$ の符号が適宜都合よく切り替わるので、特異点は発生しない」という事になっているだけである。付図 1 だけ見ると、虚部が負の時に $A = -|U|$ とすれば良いようにも思えるが、それは誤りである。原点を通過しない軌跡で $U$ の虚部の符号が入れ替わっても、 $|U|$ に微分不可能点が生じたり、 $U$ の偏角が不連続になったりすることは無いので、 $A$ の符号を反転する必要は無い。むしろ、この場合に $A$ の符号を反転してしまうと、逆に $A$ や $\theta$ が不連続になる。「複素平面上で $U$ が原点を通過したときに、 $A$ の符号を反転する」というルールにするのが一番間違いが無いと考えられるが、その場合、 $A(\omega_1)$ の符号を決めるのに、 $\omega < \omega_1$ の範囲で $U(\omega)$ が何回原点を通過しているか数える必要が発生し、数値計算上の処理が煩雑になる。より単純なルールが設定できないか検討中である。



付図 1 零点近傍の  $U(\omega)$ ,  $A(\omega)$ ,  $\theta(\omega)$  の模式図

## 付録 2. 解析信号の瞬時周波数と極狭帯域波の中心周波数

本文 3.1 で解析信号<sup>(例えば 11)</sup>に触れたが、解析信号は包絡線を描くのに便利というだけでは無く、短い時間帯の周波数特性を代表する「瞬時周波数」とよばれる値の評価ができる。解析信号の瞬時周波数とは、解析信号の位相の時間微分であり (複素正弦波 $e^{i\omega t}$ の位相 $\omega t$ の時間微分が角周波数 $\omega$ に対応することからの命名だと考えられる)、各時刻の波の周波数を表すとされている。これは、フーリエ・スペクトルの位相の周波数微分が、各周波数近傍の波の時間的重心を表すのに似ている。実際、和泉, 勝倉 (1983)<sup>9)</sup> は、全時刻の瞬時周波数の平均が、全周波数帯域におけるパワースペクトルの周波数軸上の重心に対応することを示している。そこで、ここでは、極狭帯域の考え方と同様に、瞬時周波数の評価対象時刻近傍の「極短時間」のフーリエ・スペクトルと、極狭帯域波の関係について示す。

まず、元となる実数値の時刻歴波形 $u(t)$ に対し、解析信号を $z(t)$ として、次式の通りに定義する。

$$z(t) := u(t) + \mathcal{H}[u(t)] \quad (A1)$$

これを振幅 $a(t)$ と位相 $\phi(t)$ に分けて、次の通りに書く。

$$z(t) = a(t) \exp(i\phi(t)) \quad (A2)$$

さらに、 $a(t)$ と $\phi(t)$ の時間微分を $\dot{a}(t)$ 、 $\dot{\phi}(t)$ と表すことにして、「極短時間」の時間幅 $b_t$ を、「極狭帯域」のフーリエ・スペクトルと同様に)以下の条件を満たすのに十分狭い幅として定義する。

$$a_z(t) \approx a_z(t_c) + (t - t_c)\dot{a}_z(t_c) \quad (|t - t_c| \leq b_t) \quad (A3)$$

$$\phi(t) \approx \phi(t_c) + (\omega - \omega_c)\dot{\phi}(t_c) \quad (|t - t_c| \leq b_t) \quad (A4)$$

ここに、 $t_c$ は評価対象時刻を表す。

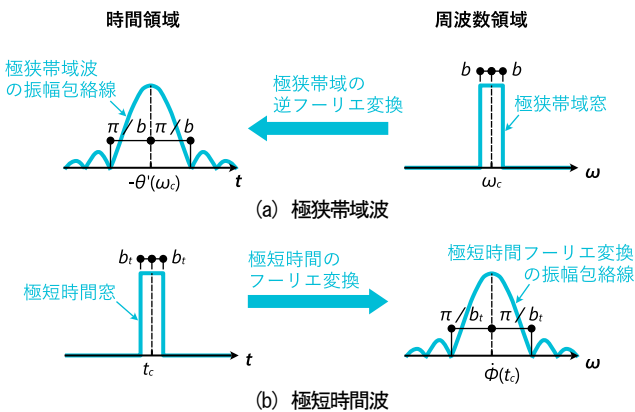
極短時間幅の窓関数で解析信号を切り出したもののフーリエ変換を考えると、本文において極狭帯域波の時間的重心が $-\theta'_c$ であることを示したのと同様の議論により、極短時間波の周波数的重心が $\dot{\phi}(t_c)$ であることを示すことができる。

したがって解析信号における $t_c$ と $-\theta'(\omega_c)$ 、 $\omega_c$ と $\dot{\phi}(t_c)$ の関係は付図2のようになる。極短時間のフーリエ変換と、極狭帯域のフーリエ変換は、時間領域と周波数領域を入れ替えて、同じことをしている形になっているが、変換・逆変換の関係にはなっていない。極狭帯域波は、時間領域では幅の広いパルスで、位相勾配はその重心となり、極短時間波は、周波数領域では、幅広い帯域にパワーが分布し、瞬時周波数はその重心となる。つまり、 $t_c$ と $-\theta'(\omega_c)$ 、 $\omega_c$ と $\dot{\phi}(t_c)$ の関係は、一般に以下の式の通りである。

$$t_c \neq -\theta'(\dot{\phi}(t_c)) \quad (A5)$$

$$\omega_c \neq \dot{\phi}(-\theta'(\omega_c)) \quad (A6)$$

「瞬時周波数」、「群遅延時間」という用語に含まれる文言の日常的な意味や、各用語の概略的な説明から受けるイメージからすれば、(A5)、(A6)式の右辺は等号関係が成り立ちそうであるが、そうではないことに注意を要する。



付図2 解析信号における極狭帯域波と極短時間フーリエ変換の模式図